MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 16. studenog 2020.

Zadatak 1. Neka je

$$f(x) = |\cos^2 x + 3\sin x - 3|.$$

(a) (3 boda) Odredite najveći interval $I \subset \mathbf{R}$ koji sadrži $\frac{\pi}{2}$ na kojem je funkcija f strogo rastuća, te odredite $f(I)$.

(b) (3 boda) Odredite inverz funkcije $f\colon I \to f(I)$.

Rješenje. Uočimo da funkciju f možemo zapisati kao

$$f(x) = |1 - \sin^2 x + 3\sin x - 3| = |\sin^2 x - 3\sin x + 2|,$$

odnosno kao kompoziciju $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$, gdje su funkcije g_i dane pravilima pridruživanja

$$g_1(x) = \sin x,\ \ g_2(x) = x^2 - 3x + 2,\ \ g_3(x) = |x|.$$

(a) Funkcija sinus je strogo rastuća na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i strogo padajuća na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, te je $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \sin([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]) = [-1, 1]$. Nadalje, iz grafa funkcije g_2 vidimo da je ona strogo padajuća na $[-1, 1]$ i da je $g_2([-1, 1]) = [0, 6]$. Kako je $g_3(x) = x$ na $[0, 6]$, slijedi i da je g_3 strogo rastuća na $[0, 6]$. Uočimo da je za $I = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ funkcija $f : I \to \mathbf{R}$ strogo rastuća, kao kompozicija dvaju strogo padajućih i jedne strogo rastuće funkcije.

Nadalje, interval $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ je najveći interval koji sadrži $\frac{\pi}{2}$ na kojem je funkcija f strogo rastuća. Naime, kako je za svaki $\varepsilon \in \langle 0, \pi\rangle$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) = \sin(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)$, odnosno $f(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) = f(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)$, funkcija f nije strogo monotona na intervalima koji sadrže neki od intervala $[\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{3\pi}{2}]$, $\varepsilon > 0$. Prema tome interval I ne možemo proširiti na lijevo. Analogno se pokaže da se ne može proširiti ni na desno.

Iz gornjeg računa vidimo da je $f([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]) = g_3(g_2(g_1([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]))) = [0, 6]$.

(b) Funkcija $f : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to [0, 6]$ je bijekcija, jer je strogo monotona (injekcija) i surjekcija. Funkciju $f^{-1}\colon [0, 6] \to [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ odredit ćemo korištenjem formule za inverz kompozicije:

$$f(y) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(y))),\ \ y \in [0, 6].$$

Prvo uočimo da je $g_1(x) = \sin(\pi - x) = h_2 \circ h_1(x)$, gdje je

$$h_1\colon \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ h_2(x) = \pi - x$$

$$h_1\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\ h_1(x) = \sin(x)$$

pa je $g_1^{-1}(y) = h_1^{-1}(h_2^{-1}(y)) = h_1^{-1}(\arcsin(y)) = \pi - \arcsin(y)$. Nadalje, $g_2(x) = y$ ako i samo ako je $x^2 - 3x + 2 - y = 0$, odnosno

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2}.$$

Kako je $\frac{3 - \sqrt{1+4y}}{2} \in [-1, 1]$ za $y \in [0, 6]$, slijedi da je inverz funkcije $g_2\colon [-1, 1] \to [0, 6]$ određen pravilom pridruživanja

$$g_2^{-1}(y) = \frac{3 - \sqrt{1 + 4y}}{2}.$$

Kako za $g_3\colon [0, 6] \to [0, 6]$ vrijedi $g_3(x) = |x| = x$, slijedi da je $g_3^{-1}(y) = y$. Stoga je

$$f^{-1}(y) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(y)) = g_1^{-1}\left(\frac{3 - \sqrt{1 + 4y}}{2}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{3 - \sqrt{1 + 4y}}{2}\right).$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 16. studenog 2020.

Zadatak 2.

(a) (3 boda) Neka su h i g dvije funkcije dane pravilima pridruživanja

$$h(x) = 4\left(\frac{4\operatorname{arcctg} x}{\pi} - 3\right)\left(\frac{4\operatorname{arcctg} x}{\pi} - 1\right)$$

i

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\lfloor 5x \rfloor}{x} & \text{za } x \le -2, \\ \lfloor x \rfloor & \text{za } x > -2. \end{cases}$$

Definirajmo funkciju f kao $f = g \circ h$. Odredite $\mathcal{R}(f)$.

(b) (4 boda) Neka je dana funkcija f pravilom pridruživanja

$$f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}.$$

Odredite $f^{-1}(\langle -2, -\frac{5}{3}\rangle)$.

Rješenje.

(a) Uočimo da je domena funkcija h i g cijeli $\mathbf{R}$, pa je domena i kompozicije $g \circ h$ također jednaka $\mathbf{R}$. Nadalje, pravilo pridruživanja za funkciju g je zapravo (uočite da je $\lfloor 5x \rfloor = -5x$, za $x \le -2$)

$$g(x) = \begin{cases} -5 & \text{za } x \le -2, \\ \lfloor x \rfloor & \text{za } x > -2. \end{cases}$$

Za funkciju h vrijedi $h = h_2 \circ h_1$, gdje su $h_1, h_2 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcije za koje vrijedi

$$h_1(x) = \frac{4\operatorname{arcctg} x}{\pi},$$
$$h_2(x) = 4(x-3)(x-1).$$

Sada je

$$\mathcal{R}(f) = f(\mathbf{R}) = g(h(\mathbf{R})) = g(h_2(h_1(\mathbf{R}))) = g(h_2(\langle 0, 4\rangle)) = g([-4, 12\rangle) = \{-5, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 11\}.$$

(b) Prirodna domena funkcije f je $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Funkcija f se može napisati kao

$$f(x) = -1 + \frac{2}{1 - e^x},$$

pa ako definiramo funkcije g_1, g_2, g_3, g_4 na sljedeći način

$$\begin{aligned} g_1 \colon \mathbf{R}\backslash\{0\} \to \mathbf{R} \quad & g_1(x) = e^x \\ g_2 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad & g_2(x) = 1 - x \\ g_3 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad & g_3(x) = \frac{2}{x} \\ g_4 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad & g_4(x) = -1 + x, \end{aligned}$$

onda vrijedi $f = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} f^{-1}(\langle -2, -\tfrac{5}{3}\rangle) &= g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(g_4^{-1}(\langle -2, -\tfrac{5}{3}\rangle)))) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(\langle -1, -\tfrac{2}{3}\rangle))) \\ &= g_1^{-1}(g_2^{-1}(\langle -3, -2\rangle)) = g_1^{-1}(\langle 3, 4\rangle) = \langle \ln 3, \ln 4\rangle. \end{aligned}$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 16. studenog 2020.

Zadatak 3.

(a) (4 boda) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \arcsin\left(1 + \sqrt{\lfloor \log_7(x^2 + x - 5) \rfloor}\right).$$

(b) (2 boda) Pronađite neku funkciju g čija je prirodna domena skup $\langle 0, +\infty\rangle \setminus \{2020^n : n \in \mathbf{Z}\}$.

Rješenje.

(a) Budući da je $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, a $1 + \sqrt{\lfloor \log_7(x^2 + x - 5) \rfloor} \geq 1$, odmah vidimo da za $x \in \mathcal{D}(f)$ mora vrijediti da je $\lfloor \log_7(x^2 + x - 5) \rfloor = 0$, što je ekvivalentno s $0 \leq \log_7(x^2 + x - 5) < 1$, odnosno

$$1 \leq x^2 + x - 5 < 7.$$

Uočimo da je za ovakve x uvijek $x^2 + x - 5 > 0$, odnosno da je zadovoljeno da je argument funkcije $\log_7$ pozitivan. Budući da je

$$1 \leq x^2 + x - 5 \iff 0 \leq (x + 3)(x - 2) \iff x \in \langle -\infty, -3] \cup [2, +\infty\rangle$$

i

$$x^2 + x - 5 < 7 \iff (x + 4)(x - 3) < 0 \iff x \in \langle -4, 3\rangle$$

zaključujemo da je $\mathcal{D}(f) = \langle -4, -3] \cup [2, 3\rangle$.

(b) Uočimo da želimo pronaći funkciju g kojoj je prirodna domena skup $\langle 0, +\infty\rangle$ iz kojeg smo uklonili točke x za koje je $\log_{2020} x$ cijeli broj. Ideja je stoga da funkciju g definiramo kao razlomak kojem će nazivnik biti jednak 0 točno onda kada je $\log_{2020} x$ cijeli broj. Na koji način možemo detektirati kada je nešto cijeli broj? Ideju nam daje činjenica da je $\sin y = 0$, ako i samo ako je $y = k\pi$ za neki $k \in \mathbf{Z}$. To znači da je $\sin(k\pi) = 0$ ako i samo ako je $k \in \mathbf{Z}$. Zbog toga definiramo

$$g(x) = \frac{1}{\sin\left(\pi \log_{2020} x\right)}.$$

Da bi za $x \in \mathbf{R}$ vrijedilo da je $x \in \mathcal{D}(g)$, moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

(i) $x > 0$ (argument logaritma je pozitivan),

(ii) $\sin\left(\pi \log_{2020} x\right) \neq 0$ (nazivnik nije 0).

Budući da smo za uvjet (ii) već rekli da je ekvivalentan s $x \notin \{2020^n : n \in \mathbf{Z}\}$, slijedi da je doista $\mathcal{D}(g) = \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{2020^n : n \in \mathbf{Z}\}$.

Napomena 1. Funkciju g mogli smo odabrati i na mnogo drugih načina, npr. $g(x) = \dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} + \pi \log_{2020} x)}$, $g(x) = \dfrac{1}{\log_{2020} x - \lfloor \log_{2020} x \rfloor}$, $g(x) = \operatorname{ctg}(\pi \log_{2020} x)$, $g(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \pi \log_{2020} x)$, ...

Napomena 2. Neki studenti funkciju g pokušali su definirati koristeći gradivo *Matematičke analize 2* na način

$$g(x) = \ln x + \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{x - 2020^n}.$$

Ova funkcija *ne* zadovoljava tražena svojstva budući da navedena suma divergira za sve $x \in \mathbf{R}$.

Napomena 3. Nekoliko studenata funkciju g definiralo je na način (ili neki njemu sličan)

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & \text{za } x \in \mathbf{R} \setminus \{2020^n : n \in \mathbf{Z}\} \\ \frac{1}{x-x} & \text{za } x \in \{2020^n : n \in \mathbf{Z}\}. \end{cases}$$

Nevoljko i teška srca dodijeljeni su im svi bodovi.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 16. studenog 2020.

Zadatak 4.

(a) (1 bod) Postoji li injekcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je i funkcija $f \circ \cos$ injekcija?

(b) (2 boda) Postoji li injekcija $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je i funkcija $\cos \circ g$ injekcija?

(c) (3 boda) Neka su $f_1, \ldots, f_k\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ periodične funkcije kojima su periodi redom $\tau_1, \ldots, \tau_k$. Ako vrijedi da je za sve i, j omjer τ_i/τ_j racionalan, dokažite da je i funkcija $f_1 + \cdots + f_k$ periodična.

Rješenje.

(a) Takva injekcija f ne postoji. Naime, za proizvoljnu funkciju $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (ne mora čak niti biti injekcija) imamo

$$(f \circ \cos)(2\pi) = f(\cos 2\pi) = f(\cos 0) = (f \circ \cos)(0),$$

pa $f \circ \cos$ nije injekcija.

(b) Takva injekcija g postoji, a ideja je da je odaberemo tako da joj slika bude sadržana u nekom intervalu na kojem je funkcija cos injekcija (na primjer, $[0, \pi]$). Ako to postignemo, tada će biti $\cos \circ g = \cos|_{[0,\pi]} \circ g$ pa ćemo moći zaključiti da se radi o injekciji, budući da je kompozicija injekcija ponovno injekcija.

Na koji ćemo način pronaći takvu injekciju g? Osnovni problem je što većina injekcija s domenom $\mathbf{R}$ ima svojstvo da im slika *nije* sadržana u nekom konačnom intervalu poput $[0, \pi]$. Međutim, znamo i neke injekcije kod kojih će to biti slučaj, npr. znamo da je $\mathcal{R}(\operatorname{arctg}) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Ideja je stoga da malo promijenimo funkciju arctg tako ostane injekcija, ali da joj slika bude sadržana u $[0, \pi]$. Na primjer, ako uzmemo $g(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$, tada je $\mathcal{R}(g) = \langle 0, \pi \rangle$ i ta je funkcija injekcija.

Napomena 1. Funkciju g mogli smo odabrati i na mnogo drugih načina, npr. $g(x) = \operatorname{arcctg} x$, $g(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$, $g(x) = 1 + \operatorname{th} x$, $g(x) = e^{-e^x}$, ...

Napomena 2. Za funkciju g *nismo* mogli uzeti $g(x) = \arccos x$ budući da je njena prirodna domena $[-1, 1]$, a ne $\mathbf{R}$ kao što se u zadatku traži.

(c) Zapišimo racionalne brojeve τ_1/τ_2, τ_1/τ_3, ..., τ_1/τ_k kao omjere prirodnih brojeva na način da imaju zajednički nazivnik. Drugim riječima, neka su $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$ takvi da je

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\tau_1}{\tau_n} = \frac{n_k}{n_1}.$$

Tvrdimo da je $n_1\tau_1$ period funkcije $f_1 + \cdots + f_k$. Doista, za proizvoljni $x \in \mathbf{R}$ imamo

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)(x + n_1\tau_1) &= f_1(x + n_1\tau_1) + f_2(x + n_1\tau_1) + \cdots + f_k(x + n_1\tau_1) \\ &= f_1(x + n_1\tau_1) + f_2(x + n_2\tau_2) + \cdots + f_k(x + n_k\tau_k) \\ &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x) \\ &= (f_1 + f_2 + \cdots + f_k)(x),\end{aligned}$$

pri čemu smo u pretposljednjem retku iskoristili činjenicu da ako je τ_i period funkcije f_i, tada i $n_i\tau_i$ njen period, budući da je n_i prirodan broj.

Napomena 3. Broj $\tau_1 \cdots \tau_k$ *ne* mora biti period funkcije $f_1 + \cdots + f_k$. Na primjer, za $f_1 = f_2 = \sin$ i $\tau_1 = \tau_2 = 2\pi$ broj $\tau_1\tau_2 = 4\pi^2$ nije period funkcije $f_1 + f_2 = 2\sin x$ ($4\pi^2$ nije *cjelobrojni* višekratnik temeljnog perioda 2π).

Napomena 4. Tvrdnja zadatka ne mora vrijediti ako izostavimo uvjet racionalnosti omjera τ_i/τ_j. Na primjer, u slučaju $k = 2$, funkcija $|\sin x| + |\sin(x\sqrt{2})|$ *nije* periodična iako funkcije $|\sin x|$ i $|\sin(x\sqrt{2})|$ jesu (temeljni periodi su im redom π i $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$). Doista, kada bi ta funkcija imala neki period $\tau > 0$ iz $|\sin 0| + |\sin(0 \cdot \sqrt{2})| = 0$ slijedilo bi da je i

$$|\sin \tau| + |\sin(\tau\sqrt{2})| = 0.$$

Međutim, odavde slijedi da je $\sin\tau = 0$ i $\sin(\tau\sqrt{2}) = 0$. Iz prve jednakosti sada zaključujemo da je $\tau = r\pi$ za neki $r \in \mathbf{Z}$, a iz druge da je $\tau\sqrt{2} = s\pi$ za neki $s \in \mathbf{Z}$. Kombinacijom ova dva zaključka slijedi da je $\sqrt{2} = s/r$, što je kontradikcija s iracionalnošću broja $\sqrt{2}$.