MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2018.

Zadatak 1. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \sqrt{\arccos\lceil 2\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}(\sin x + \tfrac{1}{2}) - 2\rceil - \tfrac{\pi}{2}}.$$

Napomena. $\lceil a\rceil$ je oznaka za najmanji cijeli broj koji nije manji od a. Npr. $\lceil 1\rceil = 1$, $\lceil \pi\rceil = 4$, $\lceil -2.5\rceil = -2$.

Rješenje. Moraju biti zadovoljene sljedeće nejednakosti

(i) $\arccos\lceil 2\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}(\sin x + \frac{1}{2}) - 2\rceil - \frac{\pi}{2} \geq 0$,

(ii) $\lceil 2\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}(\sin x + \frac{1}{2}) - 2\rceil \in [-1, 1]$,

(iii) $\sin x + \frac{1}{2} > 0$.

Iz nejednakosti (i) dobivamo $\lceil 2\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}(\sin x + \frac{1}{2}) - 2\rceil \in [-1, 0]$, što ujedno obuhvaća i (ii). Nadalje, to je ekvivalentno s

$$\begin{aligned}
-2 &< 2\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}(\sin x + \tfrac{1}{2}) - 2 \leq 0\\
0 &< \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}(\sin x + \tfrac{1}{2}) \leq 1\\
1 &< \sin x + \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\\
\tfrac{1}{2} &< \sin x \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Ovo obuhvaća i nejednakost (iii), pa je tražena domena

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\rangle.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2018.

Zadatak 2.

(a) (4 boda) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \sin\left(3^{\frac{2x^2+4x+5}{x^2+2x+2}}\right)$. Odredite sliku funkcije f.

(b) (2 boda) Neka je $A \subseteq [0,1]$ i $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zadana s

$$g(x) = \begin{cases} x^2+2x+2, & \text{za } x \in A, \\ 2^{x+\frac{1}{2}}, & \text{za } x \notin A. \end{cases}$$

Odredite $g^{-1}([2,5])$.

Rješenje.

(a) Neka su $f_1, f_3, f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_2\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definirane s

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x+1)^2, \\ f_2(x) &= \frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}, \\ f_3(x) &= 3^x, \\ f_4(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Tada je $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ i

$$\mathcal{R}_f = f(\mathbb{R}) = f_4(f_3(f_2(f_1(\mathbb{R})))) = f_4(f_3(f_2([0,+\infty]))) = f_4(f_3(\langle 2,3])) = f_4(\langle 9,27]).$$

Budući da funkcija sin poprima isključivo vrijednosti unutar $[-1,1]$, te da je $[4\pi, 6\pi] \subset \langle 9, 27]$, zaključujemo da je

$$f_4(\langle 9,27]) = [-1,1].$$

(b) Uočimo da je za sve $x \in [0,1]$ nužno $(x+1)^2+1 \in [2,5]$, pa ja u svakom slučaju $A \subseteq g^{-1}([2,5])$.

S druge strane, za $x \in [0,1]$ je $2^{x+1/2} \in [2,5]$ ako i samo ako je $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, pa je[1] i $[\frac{1}{2},1] \cap A^c \subseteq g^{-1}([2,5])$. Zaključujemo da je

$$g^{-1}([2,5]) = A \cup ([\tfrac{1}{2},1] \cap A^c) = A \cup [\tfrac{1}{2}, 1].$$

[1] Komplementiranje je s obzirom na skup $[0,1]$, dakle $A^c = [0,1] \setminus A$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2018.

Zadatak 3. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija zadana s

$$f(x) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(x^2 - 2x - 2)\right) - 1.$$

(a) (2 boda) Odredite $A = f([0,1])$.

(b) (4 boda) Je li $f|_{[0,1]}\colon [0,1] \to A$ bijekcija? Ako je, odredite $\left(f|_{[0,1]}\right)^{-1}$.

Rješenje. Funkciju f možemo zapisati jednostavnije (koristeći formulu za kosinus polovičnog kuta) kao $f(x) = \cos\left(\pi(x^2 - 2x - 2)\right)$. Tada imamo $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ pri čemu je

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3 \\ f_2(x) &= \pi x \\ f_3(x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

(a) Imamo $A = f([0,1]) = f_3(f_2(f_1([0,1]))) = f_3(f_2([-3,-2])) = f_3([-3\pi, -2\pi]) = [-1,1]$.

(b) Promatramo restrikciju funkcije f na $[0,1]$. Imamo, redom:

$f_1\colon [0,1] \to [-3,-2]$ je bijekcija (interval $[0,1]$ se nalazi unutar područja strogog pada funkcije f_1).
$f_2\colon [-3,-2] \to [-3\pi,-2\pi]$ je bijekcija (restrikcija linearne funkcije).
$f_3\colon [-3\pi,-2\pi] \to [-1,1]$ je bijekcija (kosinus je bijekcija na ovom intervalu).

Prema tome, $f|_{[0,1]}\colon [0,1] \to A$ je doista bijekcija. Računamo inverze funkcija f_1, f_2, f_3 :

$$\begin{aligned} (f_1)^{-1}(y) &= 1 - \sqrt{y+3} \quad \text{(minus predznak jer računamo inverz restrikcije na } [0,1]) \\ (f_2)^{-1}(y) &= \frac{y}{\pi} \\ (f_3)^{-1}(y) &= -2\pi - \arccos(y) \quad \text{(jer smo restringirali kosinus na } [-3\pi,-2\pi]) \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(y))) &= f_1^{-1}(f_2^{-1}(-2\pi - \arccos(y))) \\ &= f_1^{-1}\left(-2 - \frac{1}{\pi}\arccos(y)\right) \\ &= 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\pi}\arccos(y)}. \end{aligned}$$

Napomena. Zadatak se na isti način može riješiti i bez uočavanja da je $f(x) = \cos\left(\pi(x^2 - 2x - 2)\right)$, no u tom je slučaju rastav na kompozicije kompliciraniji.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2018.

Zadatak 4. Neka su $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije. Na svako od sljedećih pitanja odgovorite s odgovarajućim dokazom, odnosno kontraprimjerom.

(a) (2 boda) Ako je $f \circ g$ injekcija, mora li f biti injekcija? Mora li g biti injekcija?

(b) (2 boda) Ako je $f \circ g$ surjekcija, mora li f biti surjekcija? Mora li g biti surjekcija?

(c) (1 bod) Ako je $f \circ g$ bijekcija, mora li f biti bijekcija? Mora li g biti bijekcija?

(d) (1 bod) Ako su f i $f \circ g$ bijekcije, mora li g biti bijekcija?

(e) (1 bod) Ako postoji prirodan broj n takav da je $f^n(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, mora li f biti bijekcija?

Napomena. $f^n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ puta}})(x)$.

Rješenje.

(a) Funkcija f ne mora biti injekcija, a funkcija g mora.

Ako je $f(x) = |x|$ (što nije injekcija) i $g(x) = \operatorname{arcctg} x$, vidimo da je $(f \circ g)(x) = \operatorname{arcctg} x$, što je injekcija. (Sjetimo se da je $\operatorname{arcctg} x \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.)

Pretpostavimo da g nije injekcija, tada postoje $x_1, x_2 \in R$ takvi da je $x_1 \neq x_2$ i $g(x_1) = g(x_2)$. Tada je $(f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = (f \circ g)(x_2)$ pa ni $f \circ g$ nije injekcija, što je kontradikcija.

(b) Funkcija f mora biti surjekcija, dok funkcija g ne mora.

Direktno vidimo da je $\mathcal{R}_f = f(\mathbb{R}) \supseteq f(g(\mathbb{R})) = (f \circ g)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, dakle, funkcija f je surjekcija.

Ako je $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{za } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ i $g(x) = \operatorname{arctg} x$ (što nije surjekcija), onda je $(f \circ g)(x) = x$, što je surjekcija (čak i bijekcija).

(c) Niti jedna od funkcija f i g ne mora biti bijekcija. Primjer iz (b) nam to pokazuje.

(d) Neka je $f \circ g = h$. Kako je funkcija f bijekcija, znamo da postoji njoj inverzna funkcija, tj. funkcija f^{-1} (koja je također bijekcija). No, sada vidimo da je $g = f^{-1} \circ h$ pa zaključujemo da je funkcija g bijekcija, pošto je jednaka kompoziciji dviju bijekcija.

(e) Da, funkcija f mora biti bijekcija. Naime, ukoliko je $n = 1$, onda je $f(x) = x$, što je bijekcija. Ako je $n > 1$, onda je $f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f = f^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, tj. funkcija f^{n-1} je inverzna funkcija funkciji f, što znači da je funkcija f bijekcija.