MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

Zadatak 1. (6 bodova) Neka je $a > 0$ i neka je (x_n) niz zadan s

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}.$$

Dokažite da je niz (x_n) konvergentan i odredite mu limes.

Rješenje. Primijetimo da su svi članovi niza pozitivni realni brojevi. Iz rekurzivne relacije dobivamo $x_2 = 2 - \frac{3}{2+a}$. Za $a > 1$ vrijediti će $x_2 < x_1$, a za $0 < a < 1$ biti će $x_2 > x_1$. Računanjem idućih nekoliko članova može se naslutiti da će niz (x_n) biti padajući ako je $a > 1$, a rastući ako je $0 < a < 1$. Zato razlikujemo dva slučaja:

(1) $a > 1$: Dokažimo indukcijom da je niz (x_n) padajuć.

Vrijedi $x_{n+1} = 2 - \frac{3}{x_n+2}$. Baza indukcije je pokazana iznad, pa pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$. Dokažimo i za $n = k + 1$. Vrijedi

$$x_{k+1} < x_k \Rightarrow \frac{3}{2 + x_k} < \frac{3}{2 + x_{k+1}} \Rightarrow 2 - \frac{3}{2 + x_{k+1}} < 2 - \frac{3}{2 + x_k} \Rightarrow x_{k+2} < x_{k+1},$$

pri čemu je prva implikacija istinita jer je $x_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz zadnje tvrdnje je niz očito omeđen odozdo s 0, što zajedno sa činjenicom da strogo pada osigurava egzistenciju limesa. Standardno, puštanjem limesa kada $n \to +\infty$ u rekurzivnoj relaciji dobivamo $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ ili $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$. Zbog $x_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ zaključujemo $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

(2) $0 < a < 1$: Analogno kao u slučaju (1), indukcijom pokažemo da je niz (x_n) rastuć. Očito iz

$$x_{n+1} = 2 - \frac{3}{x_n + 2}$$

slijedi $x_n < 2$ za sve $n \in \mathbb{N}$, što znači da je niz ograničen odozgo, pa je konvergentan. Lako se ponovno dobije $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

U preostalom slučaju za $a = 1$ dobivamo $x_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ pa zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ neovisno o vrijednosti parametra a.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

Zadatak 2.

(a) (5 bodova) U ovisnosti o parametru $\alpha \in (0, \frac{2}{5}]$, izračunajte limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k^{1/5}}\right)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}}.$$

Napomena. Nizovi u brojniku i nazivniku su strogo rastući i neograničeni i te tvrdnje nije potrebno dokazivati.

(b) (2 boda) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 1$. Je li tada nužno i $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$? Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje.

(a) Neka je $a_n = n - \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k^{1/5}}\right)$ i $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$. Budući da su oba niza neograničena i strogo rastuća, po Stolzovom teoremu dovoljno je odrediti limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, a za njega imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{(n+1)^{1/5}}\right)}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{(n+1)^{1/5}}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)^{1/5}}\right)^2} (n+1)^{\alpha-2/5}.$$

Neka je $x = \frac{1}{(n+1)^{1/5}}$. Tada očito $x \to 0$ kada $n \to \infty$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{(n+1)^{1/5}}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)^{1/5}}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

S druge strane, budući da je trivijalno

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-2/5} = \begin{cases} 1 & \text{za } \alpha = \frac{2}{5}, \\ 0 & \text{za } \alpha < \frac{2}{5}, \end{cases}$$

zaključujemo da je traženi limes jednak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k^{1/5}}\right)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{za } \alpha = \frac{2}{5}, \\ 0 & \text{za } \alpha < \frac{2}{5}. \end{cases}$$

(b) Tvrdnja ne mora nužno vrijediti. Ako uzmemo f s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{za } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)}_{=1} = 1.$$

S druge strane, ako je $a_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$, tada je očito $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)}_{=0} = 0,$$

pa iz definicije limesa funkcije zaključujemo da $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ne postoji.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

Zadatak 3. (6 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{2nm^2 + 4nm - 2n - 3m^2 - 6m + 3}{nm^2 + 2mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \operatorname{ch}\left(4 - \frac{5}{x}\right) : x \in [1, +\infty\rangle \right\}.$$

Rješenje. Uočimo da je $S = (A \cdot B) \cup C$, gdje je

$$A = \left\{ 2 - \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 1 - \frac{1}{m(m+2)} : m \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ \operatorname{ch}\left(4 - \frac{5}{x}\right) : x \in [1, +\infty\rangle \right\}.$$

Budući da je $2 - \frac{3}{n} < 2$, $1 - \frac{1}{m(m+2)} < 1$ te

$$\lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{3}{n}\right) = 2$$

i

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m(m+2)}\right) = 1$$

slijedi da je $\sup A = 2$ i $\sup B = 1$. Nadalje, imamo, $\inf A = \min A = -1$ i $\inf B = \min B = \frac{2}{3}$ pa je

$$\sup(A \cdot B) = \max\{\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B\} = 2,$$

i

$$\inf(A \cdot B) = \min\{\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B\} = -1.$$

Nadalje, $-1 \leq 4 - \frac{5}{x} < 4$ za $x \in [1, +\infty\rangle$ i $\lim_{x\to\infty} \left(4 - \frac{5}{x}\right) = 4$, a ch je padajuća funkcija na $\langle -\infty, 0]$, a rastuća na $[0, +\infty\rangle$ pa je

$$\sup C = \max\{\operatorname{ch}(-1), \operatorname{ch}(4)\} = \operatorname{ch}(4),$$

a zbog $\operatorname{ch} x \geq 1$ vidimo da je 1 donja međa skupa C i ta se vrijednost dostiže za $x = \frac{5}{4}$, pa je

$$\inf C = 1.$$

Konačno, $\sup S = \max\{\sup(A \cdot B), \sup C\} = \operatorname{ch}(4)$, $\inf S = \min\{\inf(A \cdot B), \inf C\} = -1$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

Zadatak 4.

(a) (5 bodova) Odredite limes

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x^2-3x+3}{x-1}\right)(e^x-e^2)}.$$

(b) (1 bod) Ispitajte postoji li limes funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\lfloor x+1\rfloor)}{\lfloor x+1\rfloor}, & \lfloor x+1\rfloor \neq 0 \\ 0, & \lfloor x+1\rfloor = 0 \end{cases}$$

u točki $c=-1$. Ukoliko postoji, odredite ga.

Rješenje.

(a) Primijetimo da je

$$\lim_{x\to 2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\frac{3}{2},$$

pa je

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x^2-3x+3}{x-1}\right)(e^x-e^2)} = \ln\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\ln\left(\frac{x^2-3x+3}{x-1}\right)(e^x-e^2)}.$$

Nakon supstitucije $t=x-2$, limes postaje

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}+\pi\right)}{\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t+1}\right)(e^{t+2}-e^2)}.$$

Daljnje transformacije su uobičajene

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}+\pi\right)}{\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t+1}\right)(e^{t+2}-e^2)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\ln\left(\frac{t^2}{t+1}+1\right)e^2(e^t-1)} = \frac{1}{e^2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{t^2}{t+1}+1\right)}{\frac{t^2}{t+1}}\cdot\frac{t^2}{t+1}\cdot\frac{e^t-1}{t}\cdot t}$$

$$= \frac{1}{e^2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\frac{t+1}{t^3}}{\frac{\ln\left(\frac{t^2}{t+1}+1\right)}{\frac{t^2}{t+1}}\cdot\frac{e^t-1}{t}}.$$

Limes nazivnika je 1, a za brojnik koristeći $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ lako dobivamo

$$\lim_{t\to 0}\left(\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\frac{t+1}{t^3}\right) = \frac{\pi^2}{4}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}\cdot\frac{t+1}{t}\right) = \frac{\pi^2}{4}\lim_{t\to 0}\frac{t+1}{t}.$$

Međutim, posljednji limes ne postoji (pripadni limesi slijeva i zdesna jednaki su $-\infty$ i $+\infty$), pa zaključujemo da ni početni limes ne postoji.

(b) Za $-2<x<-1$ je $\lfloor x+1\rfloor = -1$, pa je $f(x)=-1$ za sve $x\in\langle -2,-1\rangle$. Slijedi

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{\sin(-1)}{-1} = \sin 1.$$

S druge strane, za $-1<x<0$ je $\lfloor x+1\rfloor = 0$, pa je iz definicije $f(x)=0$ za sve $x\in\langle -1,0\rangle$. Slijedi

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0.$$

Budući da se lijevi i desni limes ne podudaraju, traženi limes ne postoji.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

Zadatak 1. (6 bodova) Neka je $a > 0$ i neka je (x_n) niz zadan s

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{2x_n + 2}.$$

Dokažite da je niz (x_n) konvergentan i odredite mu limes.

Rješenje. Primijetimo da su svi članovi niza pozitivni realni brojevi. Iz rekurzivne relacije dobivamo $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{a+1}$. Za $a > 1$ vrijediti će $x_2 < x_1$, a za $0 < a < 1$ biti će $x_2 > x_1$. Računanjem idućih nekoliko članova može se naslutiti da će niz (x_n) biti padajući ako je $a > 1$, a rastući ako je $0 < a < 1$. Zato razlikujemo dva slučaja:

(1) $a > 1$: Dokažimo indukcijom da je niz (x_n) padajuć.

Vrijedi $x_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{x_n+1}$. Baza indukcije je pokazana iznad, pa pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$. Dokažimo i za $n = k + 1$. Vrijedi

$$x_{k+1} < x_k \Rightarrow \frac{1}{x_k + 1} < \frac{1}{x_{k+1} + 1} \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{x_{k+1} + 1} < \frac{3}{2} - \frac{1}{x_k + 1} \Rightarrow x_{k+2} < x_{k+1},$$

pri čemu je prva implikacija istinita jer je $x_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz zadnje tvrdnje je niz očito omeđen odozdo s 0, što zajedno sa činjenicom da strogo pada osigurava egzistenciju limesa. Standardno, puštanjem limesa kada $n \to +\infty$ u rekurzivnoj relaciji dobivamo $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ ili $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\dfrac{1}{2}$. Zbog $x_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ zaključujemo $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

(2) $0 < a < 1$: Analogno kao u slučaju (1), indukcijom pokažemo da je niz (x_n) rastuć. Očito iz

$$x_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{x_n + 1}$$

slijedi $x_n < \frac{3}{2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, što znači da je niz ograničen odozgo, pa je konvergentan. Lako se ponovno dobije $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

U preostalom slučaju za $a = 1$ dobivamo $x_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ pa zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ neovisno o vrijednosti parametra a.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

Zadatak 2.

(a) (5 bodova) U ovisnosti o parametru $\alpha \in (0, \frac{2}{3}]$, izračunajte limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k^{1/3}}\right)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}}.$$

Napomena. Nizovi u brojniku i nazivniku su strogo rastući i neograničeni i te tvrdnje nije potrebno dokazivati.

(b) (2 boda) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 0$. Je li tada nužno i $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$? Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje.

(a) Neka je $a_n = n - \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k^{1/3}}\right)$ i $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$. Budući da su oba niza neograničena i strogo rastuća, po Stolzovom teoremu dovoljno je odrediti limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, a za njega imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{(n+1)^{1/3}}\right)}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{(n+1)^{1/3}}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)^{1/3}}\right)^2}(n+1)^{\alpha-2/3}.$$

Neka je $x = \frac{1}{(n+1)^{1/3}}$. Tada očito $x \to 0$ kada $n \to \infty$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{(n+1)^{1/3}}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)^{1/3}}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

S druge strane, budući da je trivijalno

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-2/3} = \begin{cases} 1 & \text{za } \alpha = \frac{2}{3}, \\ 0 & \text{za } \alpha < \frac{2}{3}, \end{cases}$$

zaključujemo da je traženi limes jednak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k^{1/3}}\right)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{za } \alpha = \frac{2}{3}, \\ 0 & \text{za } \alpha < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

(b) Tvrdnja ne mora nužno vrijediti. Ako uzmemo f s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{za } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)}_{=0} = 0.$$

S druge strane, ako je $a_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$, tada je očito $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)}_{=1} = 1,$$

pa iz definicije limesa funkcije zaključujemo da $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ne postoji.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

Zadatak 3. (6 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{3nm^2 + 3nm - 3n - 4m^2 - 4m + 4}{nm^2 + mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \operatorname{ch}\left(2 - \frac{3}{x}\right) : x \in [1, +\infty\rangle \right\}.$$

Rješenje. Uočimo da je $S = (A \cdot B) \cup C$, gdje je

$$A = \left\{ 3 - \frac{4}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 1 - \frac{1}{m(m+1)} : m \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ \operatorname{ch}\left(2 - \frac{3}{x}\right) : x \in [1, +\infty\rangle \right\}.$$

Budući da je $3 - \frac{4}{n} < 3$, $1 - \frac{1}{m(m+1)} < 1$ te

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{4}{n}\right) = 3$$

i

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m(m+1)}\right) = 1,$$

slijedi da je $\sup A = 3$ i $\sup B = 1$. Nadalje, imamo, $\inf A = \min A = -1$ i $\inf B = \min B = \frac{1}{2}$ pa je

$$\sup(A \cdot B) = \max\{\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B\} = 3,$$

i

$$\inf(A \cdot B) = \min\{\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B\} = -1.$$

Nadalje, $-1 < 2 - \frac{3}{x} < 2$ za $x \in [1, +\infty\rangle$ i $\lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{x}\right) = 2$, pa je

$$\sup C = \max\{\operatorname{ch}(-1), \operatorname{ch}(2)\} = \operatorname{ch}(2),$$

a zbog $\operatorname{ch} x \geq 1$ vidimo da je 1 donja međa skupa C i ta se vrijednost dostiže za $x = \frac{3}{2}$, pa je

$$\inf C = 1.$$

Konačno, $\sup S = \max\{\sup(A \cdot B), \sup C\} = \operatorname{ch}(2)$, $\inf S = \min\{\inf(A \cdot B), \inf C\} = -1$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

Zadatak 4.

(a) (5 bodova) Odredite limes

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\ln\left(\frac{x^2+3x+3}{-(x+1)}\right)(e^x - e^{-2})}.$$

(b) (1 bod) Ispitajte postoji li limes funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\lfloor x+1\rfloor)}{\lfloor x+1\rfloor}, & \lfloor x+1\rfloor \neq 0 \\ 0, & \lfloor x+1\rfloor = 0 \end{cases}$$

u točki $c = -1$. Ukoliko postoji, odredite ga.

Rješenje.

(a) Primijetimo da je

$$\lim_{x\to -2} \ln\left(\frac{1-x}{2}\right) = \ln\frac{3}{2},$$

pa je

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\ln\left(\frac{x^2+3x+3}{-(x+1)}\right)(e^x - e^{-2})} = \ln\frac{3}{2}\cdot \lim_{x\to -2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\ln\left(\frac{x^2+3x+3}{-(x+1)}\right)(e^x - e^{-2})}.$$

Nakon supstitucije $t = x+2$, limes postaje

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2} - \pi\right)}{\ln\left(\frac{t^2-t+1}{-t+1}\right)(e^{t-2} - e^{-2})}.$$

Daljnje transformacije su uobičajene

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2} - \pi\right)}{\ln\left(\frac{t^2-t+1}{-t+1}\right)(e^{t-2} - e^{-2})} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\ln\left(\frac{t^2}{-t+1}+1\right)e^{-2}(e^t - 1)} = e^2\cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{t^2}{-t+1}+1\right)}{\frac{t^2}{-t+1}}\cdot \frac{t^2}{-t+1}\cdot \frac{e^t-1}{t}\cdot t}$$

$$= e^2\cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot \frac{-t+1}{t^3}}{\frac{\ln\left(\frac{t^2}{-t+1}+1\right)}{\frac{t^2}{-t+1}}\cdot \frac{e^t-1}{t}}.$$

Limes nazivnika je 1, a za brojnik koristeći $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ lako dobivamo

$$\lim_{t\to 0}\left(\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot \frac{-t+1}{t^3}\right) = \frac{\pi^2}{4}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}\cdot \frac{-t+1}{t}\right) = \frac{\pi^2}{4}\lim_{t\to 0}\frac{-t+1}{t}.$$

Međutim, posljednji limes ne postoji (pripadni limesi slijeva i zdesna jednaki su $-\infty$ i $+\infty$), pa zaključujemo da ni početni limes ne postoji.

(b) Za $-2 < x < -1$ je $\lfloor x+1\rfloor = -1$, pa je $f(x) = -1$ za sve $x \in \langle -2, -1\rangle$. Slijedi

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{\sin(-1)}{-1} = \sin 1.$$

S druge strane, za $-1 < x < 0$ je $\lfloor x+1\rfloor = 0$, pa je iz definicije $f(x) = 0$ za sve $x \in \langle -1, 0\rangle$. Slijedi

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0.$$

Budući da se lijevi i desni limes ne podudaraju, traženi limes ne postoji.