MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 1. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \arcsin \left\lfloor \log_2 \left(\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 \right) - 1 \right\rfloor .$$

Odredite sliku (prirodne domene) funkcije f.

Napomena. $\lfloor a \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od a. Npr. $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.

Rješenje. Odredimo uvjete za prirodnu domenu koje dobivamo iz domene funkcije arcsin.

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \log_2 \left(\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 \right) - 1 \right\rfloor &\in [-1, 1] \\
\log_2 \left(\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 \right) - 1 &\in [-1, 2\rangle \\
\log_2 \left(\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 \right) &\in [0, 3\rangle \\
\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 &\in [1, 8\rangle \\
\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) &\in [0, 7\rangle \\
x^2 + 2x - 15 &\in [1, 128\rangle
\end{aligned}$$

Uočimo da smo putem pokrili i uvjete za sve ostale funkcije. Određivanje prirodne domene tako se svodi na rješavanje sustava nejednadžbi

$$x^2 + 2x - 15 \geq 1 \qquad \text{i} \qquad x^2 + 2x - 15 < 128,$$

odnosno

$$x^2 + 2x - 16 \geq 0 \qquad \text{i} \qquad x^2 + 2x - 143 < 0,$$

čija su rješenja

$$x \in \left\langle -\infty, -1 - \sqrt{17} \right] \cup \left[-1 + \sqrt{17}, +\infty \right\rangle \qquad \text{i} \qquad x \in \langle -13, 11 \rangle .$$

Zaključujemo da je

$$\mathcal{D}_f = \left\langle -13, -1 - \sqrt{17} \right] \cup \left[-1 + \sqrt{17}, 11 \right\rangle .$$

Iz prethodnog je vidljivo kako je slika skupa $\mathcal{D}_f$ s obzirom na preslikavanje $x \mapsto \log_2 \left(\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 \right) - 1$ skup $[-1, 2\rangle$. Kako je, za $a \in [-1, 2\rangle$, $\lfloor a \rfloor \in \{-1, 0, 1\}$, vidimo da je

$$\mathcal{R}_f = \{\arcsin(-1), \arcsin 0, \arcsin 1\} = \left\{ -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \right\} .$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 2. (6 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa:

$$f(x) = e^{\left\lfloor \mathrm{arctg}\left(\frac{\cos x}{2+\cos x}\right)\right\rfloor}.$$

Odredite $f([\frac{\pi}{2}, \pi])$ i $f^{-1}([1, +\infty\rangle)$.

Napomena. $\lfloor a \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od a. Npr. $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.

Rješenje. Stavimo $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \frac{x}{x+2}$, $f_3(x) = \mathrm{arctg} x$, $f_4(x) = \lfloor x \rfloor$, $f_5(x) = e^x$. Imamo $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, pa je

$$\begin{aligned} f_1([\tfrac{\pi}{2}, \pi]) &= [-1, 0] \\ f_2([-1, 0]) &= [-1, 0] \\ f_3([-1, 0]) &= [-\tfrac{\pi}{4}, 0] \\ f_4([-\tfrac{\pi}{4}, 0]) &= \{-1, 0\} \\ f_5(\{-1, 0\}) &= \{e^{-1}, 1\} \end{aligned}$$

Dakle $f([\frac{\pi}{2}, \pi]) = \{e^{-1}, 1\}$. Nadalje, imamo $f^{-1}([1, +\infty\rangle) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(f_4^{-1}(f_5^{-1}([1, +\infty\rangle)))))$.

$$\begin{aligned} f_5^{-1}([1, +\infty\rangle) &= [0, +\infty\rangle \\ f_4^{-1}([0, +\infty\rangle) &= [0, +\infty\rangle \\ f_3^{-1}([0, +\infty\rangle) &= [0, +\infty\rangle \end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi

$$\frac{\cos x}{2 + \cos x} \geq 0 \text{ ako i samo ako } \cos x \geq 0.$$

Dakle, $f^{-1}([1, +\infty\rangle) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 3.

(a) (5 bodova) Dokažite da je funkcija zadana s

$$f(x) = \log_2\Big(\frac{\operatorname{ch}^2 x - 4\operatorname{ch} x - 5}{\operatorname{ch} x - 5}\Big) - 1$$

injekcija na intervalu $I = \langle -\operatorname{Arch} 5, 0\rangle$ i odredite joj inverz na tom intervalu.

(b) (1 bod) Postoji li interval $J \supset I$ takav da f i dalje bude injekcija na J? Ukoliko postoji, odredite najveći takav interval.

Rješenje.

(a) Neka su funkcije f_1, f_2, f_3 dane s

$$f_1(x) = \operatorname{ch} x, \quad f_2(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}, \quad f_3(x) = \log_2 x - 1.$$

Primijetimo da je

$$f_2(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} = \frac{(x-5)(x+1)}{x-5} = x + 1, \quad x \neq 5,$$

tj. f_2 se na svojoj prirodnoj domeni podudara s funkcijom $x \mapsto x + 1$. Očito je i

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1.$$

Lako se dobije

$$f_1(I) = \langle 1, 5\rangle, \quad f_2(\langle 1, 5\rangle) = \langle 2, 6\rangle, \quad f_3(\langle 2, 6\rangle) = \langle 0, \log_2 6 - 1\rangle.$$

Budući da je očito f_1 injekcija na I (strogo je padajuća), f_2 injekcija na $\langle 1, 5\rangle$ (strogo je rastuća) i f_3 injekcija na $\langle 2, 6\rangle$ (strogo je rastuća), zaključujemo da je i $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ injekcija na I kao kompozicija injekcija. Za inverze standardnim postupkom dobivamo:
$(f_1\big|_I)^{-1} \colon \langle 1, 5\rangle \to I$ dana je s

$$(f_1\big|_I)^{-1}(x) = -\operatorname{Arch} x,$$

$(f_2\big|_{\langle 1,5\rangle})^{-1} \colon \langle 2, 6\rangle \to \langle 1, 5\rangle$ dana je s

$$(f_2\big|_{\langle 1,5\rangle})^{-1}(x) = x - 1,$$

i $(f_3\big|_{\langle 2,6\rangle})^{-1} \colon \langle 0, \log_2 6 - 1\rangle \to \langle 2, 6\rangle$ dana je s

$$(f_3\big|_{[2,6\rangle})^{-1}(x) = 2^{x+1}.$$

Konačno je $(f\big|_I)^{-1} \colon \langle 0, \log_2 6 - 1\rangle \to I$,

$$(f\big|_I)^{-1}(x) = \Big((f_1\big|_I)^{-1} \circ (f_2\big|_{\langle 1,5\rangle})^{-1} \circ (f_3\big|_{\langle 2,6\rangle})^{-1}\Big)(x) = -\operatorname{Arch}(2^{x+1} - 1).$$

(b) Primijetimo da f nije definirana u točki $x = -\operatorname{Arch} 5$, pa interval I ne možemo proširiti slijeva. Označimo $J = \langle -\operatorname{Arch} 5, 0] \supset I$. Iz istih razloga kao pod (a), f_1 je injekcija na J, f_2 je injekcija na $f_1(J) = [1, 5\rangle$ i f_3 je injekcija na $f_2([1, 5\rangle) = [2, 6\rangle$. Dakle i f je injekcija na J. Interval J je najveći s traženim svojstvima jer bi eventualno daljnje proširivanje zdesna narušilo injektivnost funkcije f_1, pa samim time i funkcije f.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična funkcija s periodima 3 i 7. Dokažite da je tada f periodična i s periodom 1.

(b) (2 boda) Pokažite da za $x > 0$ vrijedi

$$(\cos \circ \ln)(e^{4\pi}x) = (\cos \circ \ln)(x).$$

(c) (3 boda) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija za koju postoji $k > 0, k \neq 1$ takav da je

$$f(kx) = f(x), \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Pronađite funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja nije periodična takvu da je $f \circ g$ periodična s periodom 3.

Rješenje.

(a) Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$f(x+1) = f((x+1)+3) = f(x+4) = f((x+4)+3) = f(x+7) = f(x),$$

pri čemu prva i treća jednakost vrijede jer je f periodična s periodom 3, a posljednja jer je f periodična s periodom 7. Iz jednakosti koju smo dobili zaključujemo da je f periodična s periodom 1.

(b) Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$(\cos \circ \ln)(e^{4\pi}x) = \cos(\ln(e^{4\pi}x)) = \cos(\ln(e^{4\pi}) + \ln x) = \cos(4\pi + \ln x) = \cos(\ln x) = (\cos \circ \ln)(x),$$

pri čemu četvrta jednakost slijedi iz činjenice da je funkcija cos periodična s periodom 2π (pa samim time i s periodom $2\pi + 2\pi = 4\pi$).

(c) Uočimo da je uvjet iz teksta zadatka sličan uvjetu za periodičnost funkcije, ali uz bitnu razliku da u ovom slučaju imamo množenje umjesto zbrajanja. Otuda dolazi ključna ideja, a to je da funkciju g biramo među funkcijama koje zbrajanje *prevađaju* u množenje. Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = k^{x/3}$. Tada je za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x+3) = f(g(x+3)) = f(k^{(x+3)/3}) = f(k \cdot k^{x/3}) = f(k^{x/3}) = (f \circ g)(x),$$

pri čemu četvrta jednakost slijedi iz uvjeta iz teksta zadatka za funkciju f. Zaključujemo da je funkcija $f \circ g$ doista periodična s periodom 3.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 1. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$g(x) = \arccos \left\lceil \log_2 \left(\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 \right) - 2 \right\rceil .$$

Odredite sliku (prirodne domene) funkcije g.

Napomena. $\lceil a \rceil$ je oznaka za najmanji cijeli broj koji nije manji od a. Npr. $\lceil 1 \rceil = 1$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.5 \rceil = -2$.

Rješenje. Odredimo uvjete za prirodnu domenu koje dobivamo iz domene funkcije arccos.

$$\begin{aligned}
\left\lceil \log_2 \left(\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 \right) - 2 \right\rceil &\in [-1, 1] \\
\log_2 \left(\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 \right) - 2 &\in \langle -2, 1] \\
\log_2 \left(\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 \right) &\in \langle 0, 3] \\
\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) + 1 &\in \langle 1, 8] \\
\log_2 \left(x^2 + 2x - 15 \right) &\in \langle 0, 7] \\
x^2 + 2x - 15 &\in \langle 1, 128]
\end{aligned}$$

Uočimo da smo putem pokrili i uvjete za sve ostale funkcije. Određivanje prirodne domene tako se svodi na rješavanje sustava nejednadžbi

$$x^2 + 2x - 15 > 1 \qquad \text{i} \qquad x^2 + 2x - 15 \leq 128,$$

odnosno

$$x^2 + 2x - 16 > 0 \qquad \text{i} \qquad x^2 + 2x - 143 \leq 0,$$

čija su rješenja

$$x \in \left\langle -\infty, -1 - \sqrt{17} \right\rangle \cup \left\langle -1 + \sqrt{17}, +\infty \right\rangle \qquad \text{i} \qquad x \in [-13, 11] .$$

Zaključujemo da je

$$\mathcal{D}_g = \left[-13, -1 - \sqrt{17} \right\rangle \cup \left\langle -1 + \sqrt{17}, 11 \right] .$$

Iz prethodnog je vidljivo kako je slika skupa $\mathcal{D}_f$ s obzirom na preslikavanje $x \mapsto \log_2 (\log_2 (x^2 + 2x - 15) + 1) - 2$ skup $\langle -2, 1]$. Kako je, za $a \in \langle -2, 1]$, $\lceil a \rceil \in \{-1, 0, 1\}$, vidimo da je

$$\mathcal{R}_g = \{\arccos(-1), \arccos 0, \arccos 1\} = \left\{ \pi, \frac{\pi}{2}, 0 \right\} .$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 2. (6 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa:

$$f(x) = 2^{\left\lfloor \operatorname{arcctg}\left(\frac{-\sin x}{2+\sin x}\right) - \frac{\pi}{2} \right\rfloor}.$$

Odredite $f([-\frac{\pi}{2}, 0])$ i $f^{-1}([1, +\infty\rangle)$.

Napomena. $\lfloor a \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od a. Npr. $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.

Rješenje. Stavimo $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \frac{-x}{x+2}$, $f_3(x) = \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}$, $f_4(x) = \lfloor x \rfloor$, $f_5(x) = 2^x$. Imamo $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, pa je

$$\begin{aligned} f_1([-\tfrac{\pi}{2}, 0]) &= [-1, 0] \\ f_2([-1, 0]) &= [0, 1] \\ f_3([0, 1]) &= [-\tfrac{\pi}{4}, 0] \\ f_4([-\tfrac{\pi}{4}, 0]) &= \{-1, 0\} \\ f_5(\{0, 1\}) &= \{1, \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

Dakle $f([-\frac{\pi}{2}, 0]) = \{1, \frac{1}{2}\}$. Nadalje, imamo $f^{-1}([1, +\infty\rangle) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(f_4^{-1}(f_5^{-1}([1, +\infty\rangle)))))$.

$$\begin{aligned} f_5^{-1}([1, +\infty\rangle) &= [0, +\infty\rangle \\ f_4^{-1}([0, +\infty\rangle) &= [0, +\infty\rangle \\ f_3^{-1}([0, +\infty\rangle) &= \langle -\infty, 0] \end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi

$$\frac{-\sin x}{2 + \sin x} \leq 0 \text{ ako i samo ako } \sin x \geq 0.$$

Dakle, $f^{-1}([1, +\infty\rangle) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 3.

(a) (5 bodova) Dokažite da je funkcija zadana s

$$f(x) = \log_3\Big(\frac{\operatorname{ch}^2 x - 7\operatorname{ch} x - 8}{\operatorname{ch} x - 8}\Big) - 2$$

injekcija na intervalu $I = \langle -\operatorname{Arch} 8, 0\rangle$ i odredite joj inverz na tom intervalu.

(b) (1 bod) Postoji li interval $J \supset I$ takav da f i dalje bude injekcija na J? Ukoliko postoji, odredite najveći takav interval.

Rješenje.

(a) Neka su funkcije f_1, f_2, f_3 dane s

$$f_1(x) = \operatorname{ch} x, \quad f_2(x) = \frac{x^2 - 7x - 8}{x - 8}, \quad f_3(x) = \log_3 x - 2.$$

Primijetimo da je

$$f_2(x) = \frac{x^2 - 7x - 8}{x - 8} = \frac{(x-8)(x+1)}{x-8} = x + 1, \quad x \neq 8,$$

tj. f_2 se na svojoj prirodnoj domeni podudara s funkcijom $x \mapsto x + 1$. Očito je i

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1.$$

Lako se dobije

$$f_1(I) = \langle 1, 8\rangle, \quad f_2(\langle 1, 8\rangle) = \langle 2, 9\rangle, \quad f_3(\langle 2, 9\rangle) = \langle \log_3 2 - 2, 0\rangle.$$

Budući da je očito f_1 injekcija na I (strogo je padajuća), f_2 injekcija na $\langle 1, 8\rangle$ (strogo je rastuća) i f_3 injekcija na $\langle 2, 9\rangle$ (strogo je rastuća), zaključujemo da je i $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ injekcija na I kao kompozicija injekcija. Za inverze standardnim postupkom dobivamo:
$(f_1\big|_I)^{-1} \colon \langle 1, 8\rangle \to I$ dana je s

$$(f_1\big|_I)^{-1}(x) = -\operatorname{Arch} x,$$

$(f_2\big|_{\langle 1,8\rangle})^{-1} \colon \langle 2, 9\rangle \to \langle 1, 8\rangle$ dana je s

$$(f_2\big|_{\langle 1,8\rangle})^{-1}(x) = x - 1,$$

i $(f_3\big|_{\langle 2,9\rangle})^{-1} \colon \langle 0, \log_3 2 - 2, 0\rangle \to \langle 2, 9\rangle$ dana je s

$$(f_3\big|_{\langle 2,9\rangle})^{-1}(x) = 3^{x+2}.$$

Konačno je $(f\big|_I)^{-1} \colon \langle \log_3 2 - 2, 0\rangle \to I$,

$$(f\big|_I)^{-1}(x) = \Big((f_1\big|_I)^{-1} \circ (f_2\big|_{\langle 1,8\rangle})^{-1} \circ (f_3\big|_{\langle 2,9\rangle})^{-1}\Big)(x) = -\operatorname{Arch}(3^{x+2} - 1).$$

(b) Primijetimo da f nije definirana u točki $x = -\operatorname{Arch} 8$, pa interval I ne možemo proširiti slijeva. Označimo $J = \langle -\operatorname{Arch} 8, 0] \supset I$. Iz istih razloga kao pod (a), f_1 je injekcija na J, f_2 je injekcija na $f_1(J) = [1, 8\rangle$ i f_3 je injekcija na $f_2([1, 8\rangle) = [2, 9\rangle$. Dakle i f je injekcija na J. Interval J je najveći s traženim svojstvima jer bi eventualno daljnje proširivanje zdesna narušilo injektivnost funkcije f_1, pa samim time i funkcije f.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična funkcija s periodima 4 i 9. Dokažite da je tada f periodična i s periodom 1.

(b) (2 boda) Pokažite da za $x > 0$ vrijedi

$$(\sin \circ \ln)(e^{4\pi} x) = (\sin \circ \ln)(x).$$

(c) (3 boda) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija za koju postoji $k > 0, k \neq 1$ takav da je

$$f(kx) = f(x), \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Pronađite funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja nije periodična takvu da je $f \circ g$ periodična s periodom 2.

Rješenje.

(a) Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$f(x+1) = f((x+1)+4) = f(x+5) = f((x+5)+4) = f(x+9) = f(x),$$

pri čemu prva i treća jednakost vrijede jer je f periodična s periodom 4, a posljednja jer je f periodična s periodom 9. Iz jednakosti koju smo dobili zaključujemo da je f periodična s periodom 1.

(b) Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$(\sin \circ \ln)(e^{4\pi} x) = \sin(\ln(e^{4\pi} x)) = \sin(\ln(e^{4\pi}) + \ln x) = \sin(4\pi + \ln x) = \sin(\ln x) = (\sin \circ \ln)(x),$$

pri čemu četvrta jednakost slijedi iz činjenice da je funkcija sin periodična s periodom 2π (pa samim time i s periodom $2\pi + 2\pi = 4\pi$).

(c) Uočimo da je uvjet iz teksta zadatka sličan uvjetu za periodičnost funkcije, ali uz bitnu razliku da u ovom slučaju imamo množenje umjesto zbrajanja. Otuda dolazi ključna ideja, a to je da funkciju g biramo među funkcijama koje zbrajanje *prevađaju* u množenje. Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = k^{x/2}$. Tada je za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x+2) = f(g(x+2)) = f(k^{(x+2)/2}) = f(k \cdot k^{x/2}) = f(k^{x/2}) = (f \circ g)(x),$$

pri čemu četvrta jednakost slijedi iz uvjeta iz teksta zadatka za funkciju f. Zaključujemo da je funkcija $f \circ g$ doista periodična s periodom 2.