MATEMATIČKA ANALIZA 1

`natjecanje`, 2. 2. 2007.

Ime i prezime: ______________________

Šifra: ______________________

1	2	3	4	5	Σ

Napomene:
- Od pet pondu đenih zadataka odaberite **četiri** koja ćete rješavati.
- Obavezno **prekrižite** kuću kod zadatka kojeg ne želite rješavati.
- Svaki zadatak donosi po 25 bodova. Prekrižen zadatak neće biti bodovan.
- U svakom rješavanom zadatku **detaljno** obrazložite vaše tvrdnje.
- Svaki zadatak rješavajte na zasebnom potpisanom papiru.

(25) 1. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ pozitivni realni brojevi. Bez upotrebe L'Hospitalovog pravila izračunajte limes

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^3}+b^{x^3}+c^{x^3}}{a^{x^2}+b^{x^2}+c^{x^2}}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(25) 2. OAPIISS (Odredite ako postoje infimum i supremum skupa)

$$S := \left\{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} \ : \ a, b, c \in \mathbb{R}_+\right\}.$$

(25) 3. Izračunajte limes

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{2007}\rfloor+\lfloor 2\sqrt{2007}\rfloor+\cdots+\lfloor n\sqrt{2007}\rfloor}{\lfloor\sqrt{2008}\rfloor+\lfloor 2\sqrt{2008}\rfloor+\cdots+\lfloor n\sqrt{2008}\rfloor},$$

gdje je sa $\lfloor\cdot\rfloor$ označena funkcija "najveće cijelo".

(25) 4. Za $a, b \in \mathbb{R}$ niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva zadan je rekurzivno:

$$x_1 := b, \quad x_{n+1} = x_n^2 + (1-2a)x_n + a^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odredite nužne i dovoljne uvjete na brojeve a i b tako da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira. Koliki je tada limes $\lim_{n\to\infty} x_n$?

(25) 5. Odredite sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(1) = 2, \quad f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Zavod za analizu