Geofizički odsjek
Prirodoslovno-matematički fakultet
Sveučilište u Zagrebu

Zbirka zadataka iz Dinamičke meteorologije 2

Ljetni semestar ak. god. 2019./2020.

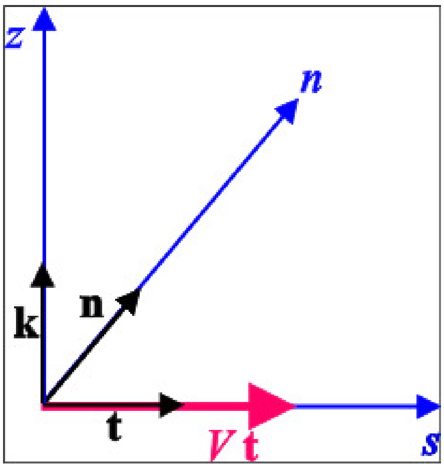
Skriptu pripremila: dr. sc. Karmen Babić

Zadnja izmjena: 27.04.2020.

Sadržaj

1. Prirodni koordinatni sustav

Prirodni koordinatni sustav je sustav čije su koordinatne osi (s, n, z) međusobno okomite. Jedinični vektori pripadnog sustava su ($\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{k}$). Sustav se postavlja tako da je os u smjeru vektora brzine $\boldsymbol{v} = V\boldsymbol{t}$, gdje je V modul vektora brzine (odatle vektor brzine ima samo s-komponentu koja je uvijek pozitivna), n os je normalna na s os u horizontalnoj ravnini, a z os je vertikalna.



Slika 1.1: Prirodni koordinatni sustav.

Za gibanja po zakrivljenim strujnicama s i n osi su također zakrivljene, ali uvijek međusobno okomite. Dogovor je da je radijus zakrivljenosti strujnice R na sjevernoj hemisferi pozitivan (ciklonalan) ako je strujanje protusatno. Kod strujanja u smjeru kazaljke na satu R je negativan (anticiklonalan).
Horizontalna brzina:

$$\vec{v_h} = V\vec{s}, \tag{1.1}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \qquad \text{i} \qquad V > 0 \tag{1.2}$$

Akceleracija:

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{s}) = \vec{s}\frac{dV}{dt} + V\frac{d\vec{s}}{dt} \tag{1.3}$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dds}\frac{ds}{dt} = V\frac{d\vec{s}}{ds} \tag{1.4}$$

$$\frac{d\vec{s}}{ds} =? \qquad \frac{d\vec{s}}{ds} = \lim_{\delta s \to 0}\frac{\delta\vec{s}}{\delta s} \tag{1.5}$$

$\delta s = R\delta\psi$ $\quad$ $R > 0$ ciklonalno na NH

$\delta\psi = \frac{\delta s}{R} = \frac{\delta\vec{s}}{|\vec{s}|}$ $\quad$ $R < 0$ anticiklonalno na NH

Imamo razmjer:

$$\frac{\delta\vec{s}}{\delta s} = \frac{\vec{s}}{R}, \text{ ali je } \delta\vec{s} \text{ u } \vec{n} \text{ smjeru, pa slijedi:} \tag{1.6}$$

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = \lim_{\delta s = 0}\frac{|\delta\vec{s}|\vec{n}}{\delta s} = \frac{1}{R}\vec{n} \tag{1.7}$$

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R}V \tag{1.8}$$

Pa slijedi da je **akceleracija u PKS-u:**

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} = \vec{s}\frac{dV}{dt} + V\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s}\frac{dV}{dt} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

- **Coriolisova sila**: uvijek je okomita na smjer gibanja

$$\vec{F_{Co}} = -f\vec{k} \times \vec{v}$$

$$\vec{F_{Co}} = -fV\vec{n} \tag{1.9}$$

- **Sila gradijenta tlaka:**

$$-\alpha\nabla_h p = -\alpha\frac{\partial p}{\partial s}\vec{s} - \alpha\frac{\partial p}{\partial n}\vec{n} \tag{1.10}$$

- **Horizontalna jednadžba gibanja u PKS-u:**

$$\frac{dV}{dt}\vec{s} + \frac{V^2}{R}\vec{n} = -fV\vec{n} - \frac{1}{\rho}\nabla_h p \tag{1.11}$$

  po komponentama:

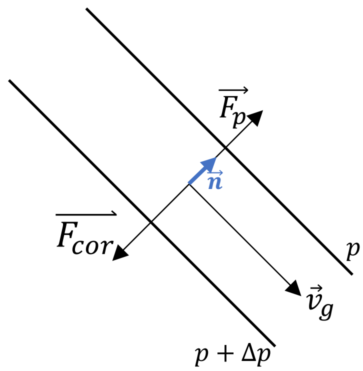
s ... $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$

n ... $\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

1.1 Ravnotežna (stacionarna) gibanja u PKS-u

1. **Geostrofičko strujanje,** $v = v_g$

   - stacionarno: $dv/dt = 0$
   - pravocrtno: $R \to \pm\infty$ $(V^2/R \to 0)$



s ... $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$

n ... $fv_g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

Pa slijedi da je izraz za geostrofički vjetar u PKS:

$$v_g = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial n} \tag{1.12}$$

2. **Inercijalno strujanje**

   - stacionarno: $dv/dt = 0$
   - $\nabla_h p = 0$ $(\partial p/\partial n = 0)$

Ako je polje tlaka jednoliko horizontalno: $-\alpha\nabla_h p = 0$

n ... $\frac{V^2}{R} + fV = 0$

$V = -Rf$

Prema tome, mora biti $R < 0$ (anticiklonalno strujanje) jer je $V > 0$ uvijek. Budući da je $dV/dt = 0$, slijedi da je $V = const.$ i $R = const.$

- Čest zraka koja kruži **anticiklonalno** $\to$ oscilacije
- Budući da su Corisolisova sila i centrifugalna sila uzrokovane inercijom fluida $\to$ inercijalne oscilacije (čest se giba zbog inercije iako je $\nabla_p = 0$)

– Period oscilacija:

$$T = -\frac{2\pi R}{V} = \frac{-2\pi R}{-Rf} = \frac{2\pi}{f} = \frac{2\pi}{2\Omega sin\phi} = \frac{\pi}{\Omega sin\phi},$$

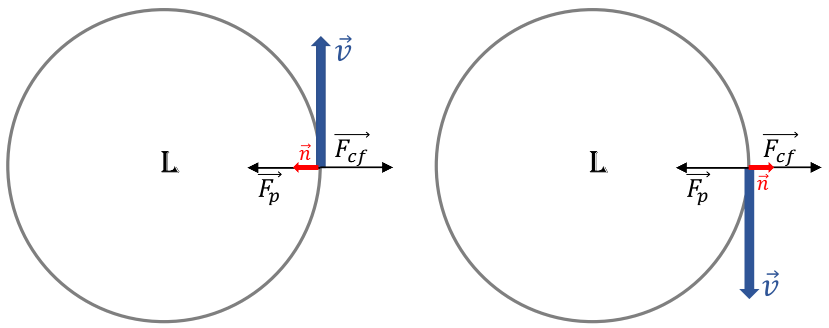
gdje je f Coriolisov parametar, ϕ je geografska širina, Ω je kutna brzina rotacije Zemlje.

– U meteorologiji su inercijalne oscilacije manje važne jer je sila gradijenta tlaka uglavnom različita od nule i ona je gotovo uvijek uzrok strujanja zraka, ali u oceanima, gdje su brzine (a time i R) puno manje nego u atmosferi, velika količina energije je sadržana u strujanjima koja osciliraju inercijalnim periodom.

3. **Ciklostrofičko strujanje** ($R_0 >> 1$)

- ovaj tip strujanja nastaje oko polja niskog tlaka kad je zakrivljenost izobara takva da su sila gradijenta tlaka i centrifugalna sila u ravnoteži
- **tornado** predstavlja ovaj tip ravnotežnog strujanja
- stacionarno je $dV/dt = 0$
- Coriolisova sila je puno manja od centrifugalne sile i sile gradijenta tlaka (zbog dovoljno male horizonatlne skale)

Ciklonalno strujanje	Anticiklonalno strujanje
$R > 0,\ \frac{\partial p}{\partial n} < 0$	$R < 0,\ \frac{\partial p}{\partial n} > 0$



Iz sljedeće jednadžbe nađemo brzinu ciklostrofičkog strujanja:

$$\frac{V2}{R} + \underbrace{fV}_{\approx 0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \tag{1.13}$$

Brzina ciklostrofičkog strujanja:

$$V = \sqrt{-\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} \tag{1.14}$$

– U praksi je uočeno da većina tornada na sjevernoj hemisferi rotira u ciklonalnom smjeru jer nastaju od velikih rotirajućih superćelijskih oluja koje 'osjećaju' djelovanje Coriolisove sile

– Kod pojava manje skale (pješčane oluje, morske pijavice) nema preferiranog smjera jer ne 'osjećaju' Coriolisovu silu

4. **Gradijentsko strujanje**

- stacionarno: $dV/dt = 0$
- sve tri sile (sila gradijenta tlaka, Coriolisova i centrifugalna sila) djeluju podjednako

s . . . $\quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$

n . . . $\quad \frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

Slijedi da je brzina gradijentskog strujanja:

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$$

	$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$	Ciklonalni tok ($R > 0$)	Anticiklonalni tok ($R < 0$)
$\frac{\partial p}{\partial n} > 0$	$+\sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$	$V < 0$	$V > 0$ **antibaričko strujanje**
$\frac{\partial p}{\partial n} > 0$	$-\sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$	$V < 0$	$V < 0$
$\frac{\partial p}{\partial n} < 0$	$+\sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$	$V > 0$	$V > 0$
$\frac{\partial p}{\partial n} < 0$	$-\sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$	$V < 0$	$V > 0$

– $V < 0$ nema fizikalnog smisla jer $V > 0$ u PKS-u

– Da bi rješenje imalo fizikalni smisao, $\sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} \in \mathbf{R}$.

$$\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \geq 0 \qquad |\frac{\partial p}{\partial n}| < \frac{\rho f^2|R|}{4}$$

– Za cikolnalni tok: $\partial p/\partial n < 0$, $R > 0 \Longrightarrow$ uvijek ispunjeno $\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \geq 0$

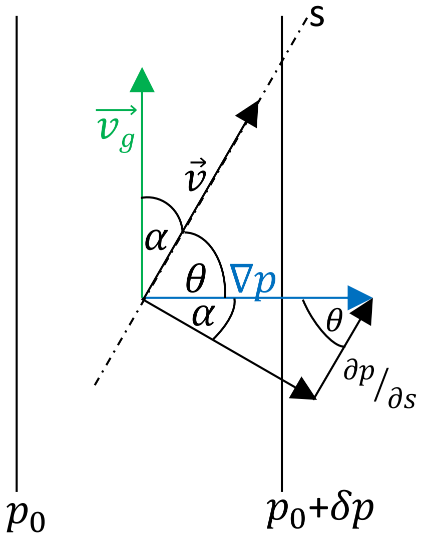
– Za anticiklonalni tok: $\partial p/\partial n > 0$, $R < 0 \Longrightarrow \frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} > 0$ samo ako je $\frac{f^2R^2}{4} > \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

– Za $R \to 0$, $\partial p/\partial n \to 0$ gradijent tlaka u blizini centra anticiklone je manji nego u blizii centra ciklone $\to$ vjetar u blizini centra anticiklone je slab (tišina) $\to$ slabiji nego blizu središta ciklone

1.2 Zadaci

1. Stvarni vjetar je zakrenut za 30^o udesno od geostrofičkog vjetra. Koliko je ubrzanje vjetra ako je iznos geostrofičkog vjetra 20 m s^{-1}, a $f = 10^{-4}$ s^{-1}.

   Rješenje:



$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = |\nabla p| \cos\theta = |\nabla p| \sin\alpha$$

$$v_g = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$|\vec{v_g}| = \frac{1}{\rho f}|\nabla p| \Rightarrow |\nabla p| = \rho f |\vec{v_g}|$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho f |\vec{v_g}| \sin\alpha$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\rho f |\vec{v_g}| \sin\alpha$$

$$\frac{dV}{dt} = -f|\vec{v_g}| \sin\alpha = -10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

2. Nađite vezu između gradijentskog i geostrofičkog vjetra u istoj točki.

   Rješenje:

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$f v_g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$v_g = \frac{V^2}{fR} + V$$

3. Odredite Rossby-jev broj u zrelom tornadu ako je tangencijalna brzina na udaljenosti 300 m od centra vrtloga 30 m s^{-1}. Pretpostavite da je $f = 10^{-4}$ s^{-1}. Kakav je to tip gibanja?
Rješenje:

$$\underbrace{\frac{dV}{dt}\vec{s} + \frac{V^2}{R}\vec{n}}_{\text{akceleracija}} = \underbrace{-fV\vec{n}}_{\text{Fcor}} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\nabla_h p}_{\text{grad p}}$$

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

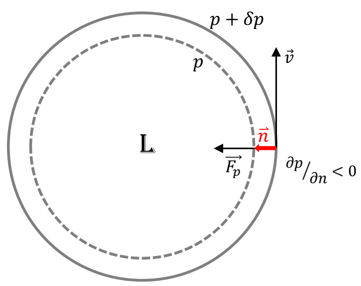
Rossby-jev broj je definiran kao omjer akceleracije i Coriolisove sile, pa slijedi:

$$Ro = \frac{V}{fR} = \frac{30 \text{ m s}^{-1}}{10^{-4} \text{ s}^{-1}\ 300 \text{ m}} = 10^3$$

Strujanje je ciklostrofičko.

4. Na $R = 50$ km od centra ciklone izmjeren je radijalni gradijent tlaka od 5 hPa/100 km. Ciklona se nalazi na 20^o N. Odredite gradijentski i geostrofički vjetar. Kakav se rezultat dobije za slučaj ciklostrofičke ravnoteže? $\Omega = 7.29 \times 10^{-5}$ s^{-1}, $\rho = 1.25$ kg m^{-3}.
Rješenje:

R = 50 km
$\partial p/\partial n$ = -5 hPa/100 km
ϕ = 20 ^{o}N



- Gradijentski vjetar: $V = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} = 12.9$ m s^{-1}
- Geostrofički vjetar: $v_g = V(1 + \frac{V}{fR}) = 79.6$ m s $^{-1}$
- Ciklostrofičko strujanje: $V = \sqrt{-\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} = 14.2$ m s^{-1}

Rossby-jev broj: $Ro = \frac{V}{fR} = 5$

- što je Rossby-jev broj manji, to je bolja geostrofička aproksimacija
- što je Ro veći, vrijedi ciklostrofička aproksimacija

Prema tome, za $Ro = 5$ ne vrijedi ciklostrofička ravnoteža.

5. Pod pretpostavkom da tornado rotira stalnom kutnom brzinom ω, pokažite da je tlak u centru:

$$p_c = p_0 exp(-\omega^2 r_0^2/2R\overline{T})$$

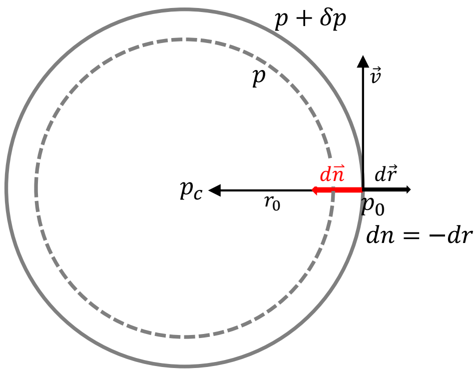
gdje je p_0 prizemni tlak na udaljenosti r_0 od centra, $\overline{T}$ srednja temperatura izračunata od centra do r_0. Trenje zanemarite. Nađite tlak u središtu torndada za sljedeć vrijednosti:

(a) $\overline{T} = 287$ K, $r_0 = 100$ m, $v(r_0) = 100$ ms^{-1}, $p(r_0) = p_0 = 1000$ hPa.

(b) $\overline{T} = 290$ K, $r_0 = 200$ m, $v(r_0) = 80$ ms^{-1}, $p(r_0) = p_0 = 1000$ hPa.

Rješenje:
Za tornado vrijedi ciklostrofičko gibanje, tj. $F_{cor} << F_{cf}, F_p$

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$
$$\frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$
$$\frac{V^2}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$
$$dp = \frac{V^2}{r}\rho dr = V^2 \frac{dr}{r}\frac{p}{RT}$$
$$\frac{dp}{p} = \frac{V^2}{RT}\frac{dr}{r}, \qquad V = \omega r, \qquad T = \overline{T}$$
$$\frac{dp}{p} = \frac{\omega^2 r^2}{R\overline{T}}\frac{dr}{r} \Longrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{\omega^2}{R\overline{T}} r dr \quad / \int_0^{r_0} \int_{p_c}^{p_0}$$
$$\ln\frac{p_0}{p_c} = \frac{1}{RT}\omega^2 (\frac{r_0^2}{2})$$
$$p_c = p_0 \exp(-\frac{\omega^2 r_0^2}{2R\overline{T}})$$



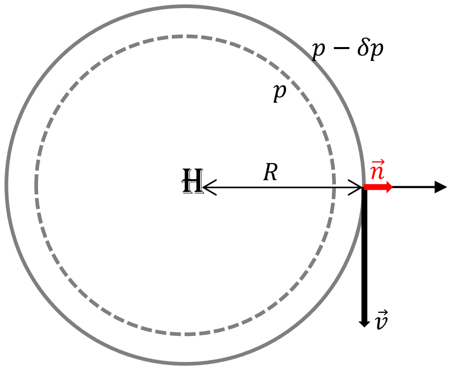
(a) $p_c = 941.1$ hPa

(b) $p_c = 962.3$ hPa

6. Odredite maksimalni mogući vjetar u anticikloni na $\phi = 55^o$ N na udaljenosti 500 km od središta anticiklone. Odredite pripadnu maksimalnu udaljenost između izohipsa na izobarnoj karti ako je skala karte 1:2$\times 10^7$. Izohipse se crtaju svakih 40 m visinske razlike.

Rješenje:

R = -500 km
$\phi = 55\ ^o$N
δz = 40 m



$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$

U anticikloni: $R < 0$, $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$ (regularno visoki).

Prema tome, $V = -\frac{fR}{2} - \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$. Maksimalna brzina je za $\sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} = 0$

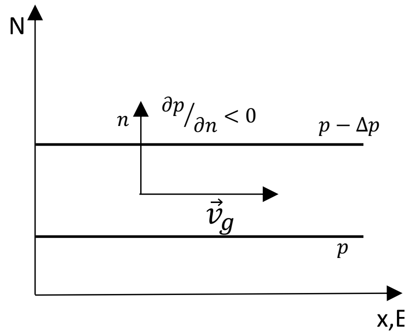
Slijedi da je: $V_{max} = -\frac{fR}{2}$ = 29.9 m s^{-1}

Udaljenost izohipsa Δn određujemo iz:

$$\frac{f^2R^2}{4} = \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$
$$\frac{f^2R^2}{4} = \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}$$
$$\frac{f^2R^2}{4} = \frac{R}{\rho}(-\rho g)\frac{\partial z}{\partial n} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{f^2R}{4g}$$
$$\delta n = -\frac{4g\delta z}{f^2R} = 2.2 \cdot 10^5 \text{ m (u prirodi)}$$
$$\text{Udaljenost izohipsi na karti: } \Delta n = \frac{\delta n}{2 \cdot 10^7} = 1.1 \text{ cm}$$

7. Izračunajte brzinu geostrofičkog vjetra ako je gradijent tlaka 1 kPa/1000 km te usporedite sa svim mogućim gradijentskim brzinama vjetra ako je radijus zakrivljenosti $R = \pm 500$ km. $\rho = 1.0$ kg m^{-3}, $f = 10^{-4}$ s^{-1}.
Rješenje:

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$
$$v_g = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial n}$$
$$v_g = -\frac{1}{1.0 \text{ kg m}^{-3} 10^{-4} \text{ s}^{-1}}\left(\frac{-10^3 \text{ Pa}}{10^6 \text{ m}}\right)$$
$$v_g = 10 \text{ m s}^{-1}$$

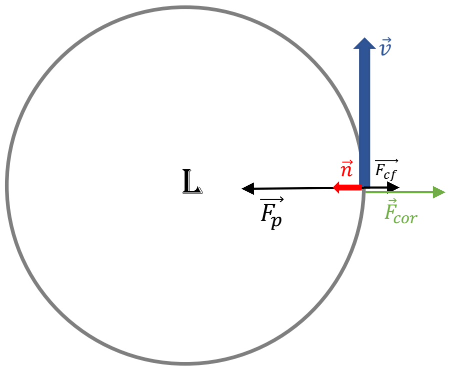


$$|R| = 5 \cdot 10^5 \text{ m}, \quad \left|\frac{\partial p}{\partial n}\right| = 10^{-3} \text{ Pa m}^{-1}$$

- Gradijentski vjetar:

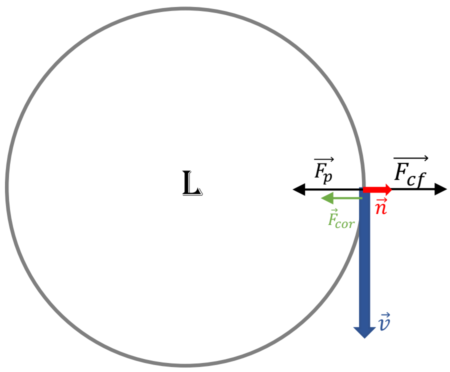
$$V = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$$

(a) regularno niski: $R > 0$, $+\sqrt{()}$, $\partial p/\partial n < 0$



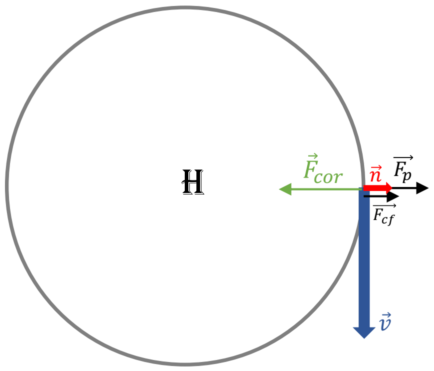
$$V = 8.5 \text{ m s}^{-1}$$

(b) anomalno niski (antibaričko strujanje): $R < 0$, $+\sqrt{()}$, $\partial p/\partial n > 0$



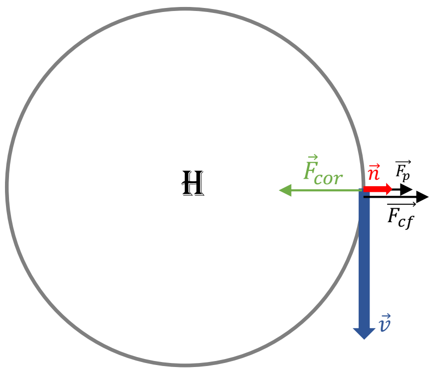
$$V = 58.5 \text{ m s}^{-1}$$

(c) regularno visoki: $R < 0$, $-\sqrt{()}$, $\partial p/\partial n < 0$



$V = 13.8$ m s^{-1}

(d) anomalno visoki: $R < 0$, $+\sqrt{()}$, $\partial p/\partial n < 0$

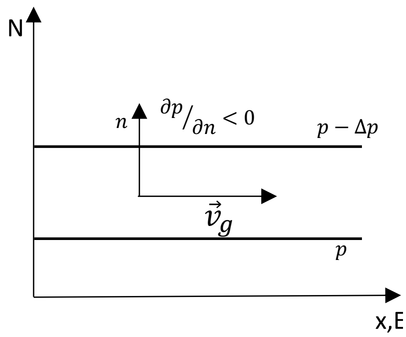


$V = 36.2$ m s^{-1}

8. Kolika je brzina geostrofičkog vjetra ako je razmak susjednih izobara na karti mjerila 1:10^7 $\Delta n = 3$ cm, ϕ=60^o N, $\rho = 1.27$ kg m^{-3}. Izobare su nacrtane svakih 5 hPa.

   Rješenje:

$$v_g = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial n}$$
$$\frac{\Delta p}{\Delta n} = \left(-\frac{5 \text{ hPa}}{3 \text{ cm}}\right)_{\text{karta}}$$
$$\frac{\Delta p}{\Delta n} = \left(-\frac{5 \text{ hPa}}{3 \cdot 10^5 \text{ m}}\right)_{\text{u prirodi}}$$
$$v_g = 10.4 \text{ m s}^{-1}$$



9. Izračunajte brzinu geostrofičkog vjetra na 500-hPa plohi ako je razmak susjednih izohipsi na karti apsolutne topografije 500-hPa 3.5 cm, $\phi = 60^o$ S, a razmjer karte je 1:2×10^7. Izohipse se crtaju svakih δZ= 40 gpm.

Rješenje:

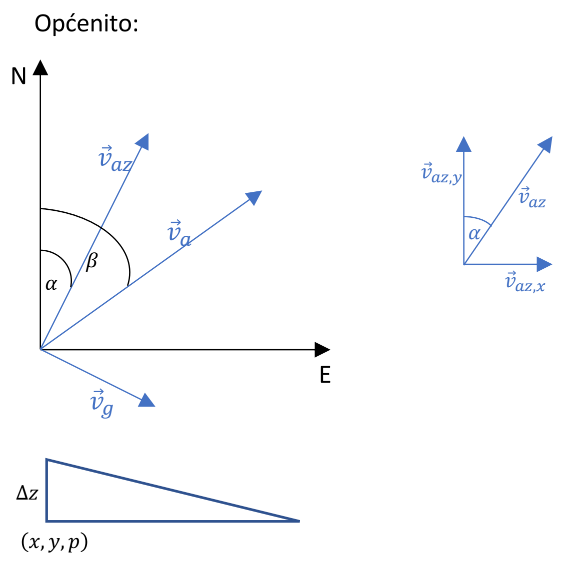
$$\vec{v_g} = \frac{g}{f}\vec{k} \times \nabla_p Z = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p \phi$$

$$f = 2\Omega \sin\phi$$

$$|\vec{v_g}| = \frac{1}{2\Omega \sin\phi}\frac{40 \cdot 9.8 \text{ m}}{3.5 \cdot 10^{-2}}\frac{1}{2 \cdot 10^7} = 4.4 \text{ m s}^{-1}$$

10. Zrakoplov leti pod azimutom $\alpha = 60^o$ brzinom $v_{az} = 200$ m s^{-1} u odnosu na zrak i giba se u odnosu na čvrstu točku na tlu pod azimutom $\beta = 90^o$ brzinom $v_a = 225$ m s^{-1}. Ako zrakoplov leti na plohi konstantnog tlaka, kolika mu je promjena visine (izražena u metrima po kilometru horizontalne udaljenosti) ako je polje tlaka stacionarno, te ako je vjetar geostrofički? $f = 10^{-4}$ s^{-1}.
Rješenje:
Iz skice ispod slijedi da je:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{az} + \vec{v}_g$$



$$\vec{v}_{az} = \cos(90^o - \alpha)v_{az}\vec{i} + \sin(90^o - \alpha)v_{az}\vec{j} \Longrightarrow \vec{v}_{az} = \sin\alpha v_{az}\vec{i} + \cos\alpha v_{az}\vec{j}$$
$$\vec{v}_a = \cos(90^o - \beta)v_a\vec{i} + \sin(90^o - \beta)v_a\vec{j} \Longrightarrow \vec{v}_a = \sin\beta v_a\vec{i} + \cos\beta v_a\vec{j}$$
$$\vec{v}_g = \vec{v}_a - \vec{v}_{az} = (v_a \sin beta - v_a z \sin\alpha)\vec{i} + (v_a \cos\beta - v_{az}\cos\alpha)\vec{j}$$

Geostrofički vjetar u izobarnom koordinatnom sustavu (x,y,p):

$$\vec{v}_g = \frac{g}{f}\vec{k} \times \nabla_p Z \qquad \Big/ \vec{k}\times$$

$$\vec{k} \times \vec{v}_g = -\frac{g}{f}\nabla_p Z \quad \Longrightarrow \nabla_p Z = -\frac{f}{g}\vec{k} \times \vec{v}_g$$

$\nabla_p Z$ označava horizontalne promjene visine izobarne plohe na kojoj zrakoplov leti. Promjene visine izobarne plohe u Langrageovom sustavu:

$$\frac{dZ}{dt} = \underbrace{\frac{\partial Z}{\partial t}}_{=0} + \vec{v}_a \cdot \nabla_p Z + \omega_a \frac{\partial Z}{\partial p}$$

$$\omega_a = 0 \qquad \text{budući da se giba po plohi } p = const.$$

$$\frac{dZ}{dt} = \vec{v}_a \cdot \nabla_p Z, \qquad \Longrightarrow \Delta Z = \frac{dZ}{dt}\Delta t, \quad \Delta t = \frac{1 \text{ km}}{v_a}$$

Slijedi da je:

$$\vec{v}_a = 225\vec{i}$$

$$\vec{v}_g = 51.8\vec{i} - 100\vec{j}$$

$$\nabla_p Z = -\frac{f}{g}\vec{k} \times \vec{v}_g = -\frac{10^{-4}}{9.81}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_g & v_g & 0 \end{vmatrix} = -1.02 \cdot 10^{-5}(51.8\vec{j} + 100\vec{i})$$

$$\frac{dZ}{dt} = \vec{v}_a \cdot \nabla_p Z = -0.23 \text{ m s}^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta Z = \frac{dZ}{dt}\Delta t = -1.02 \text{ m km}^{-1}$$

11. Gradijentski vjetar u (a) cikloni i (b) anticikloni na kružnoj izobari radijusa $R = 400$ km i $\phi = 60^o$ N iznosi 15 m s^{-1}. Kolika je brzina geostrofičkog vjetra pri istim uvjetima.

Rješenje:

$$v_g = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$\frac{V^2}{R} + fV = fv_g \Longrightarrow v_g = \frac{V^2}{Rf} + V$$

(a) $R > 0$, $v_g = 19.45$ m s^{-1}

(b) $R < 0$, $v_g = 10.55$ m s^{-1}

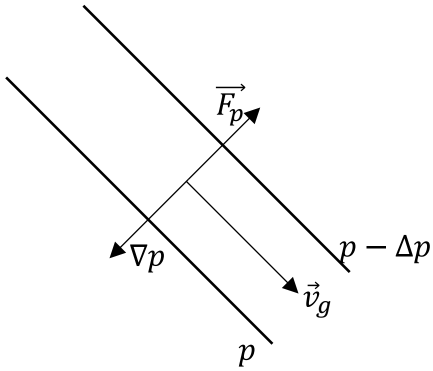
12. U nekoj točki u visini na $\phi = 55^o$ N puše geostrofički vjetar sa sjeverozapada brzinom 10 m s^{-1}. Kolika je horizontalna komponenta gradijenta tlaka u toj točki i u kojem je smjeru ako je gustoća zraka na toj visini $\rho = 1.1$ kg m^{-3}.

Rješenje:

$$\underbrace{\frac{V^2}{R}}_{=0 \text{ jer } R\to\infty} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$fv_g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho f v_g = -\frac{1.3 \text{ hPa}}{100 \text{ km}}$$



- smjer gradijenta tlaka (∇p): prema jugozapadu
- smjer sile gradijenta tlaka ($\vec{F_p}$): prema sjeveroistoku

2. Trajektorije i strujnice u PKS-u

U PKS-u, $s(x, y, z)$ označava udaljenost uzduž krivulje koja odgovara putanji česti zraka na horizontalnoj ravnini. Putanja koju slijedi čest zraka u konačnom vremenskom periodu se naziva **trajektorija**. Važno je jasno razlikovati trajektorije od strujnica.

- **Trajektorija** je putanja individualnih česti fluida u konačnom vremenskom intervalu
- **Strujnica** je krivulja za koju je u svakoj točki vektor brzine tangencijalan na nju, tj. ona prikazuje "snapshot" polja brzine (strujanja) u nekom trenutku

Horizontalne trajektorije se određuju integracijom jednadžbe

$$\frac{ds}{dt} = v(x, y, t)$$

u nekom konačnom vremenskom periodu za svaku čest zraka koja se prati. Strujnice se određuju integracijom

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y, t_0)}{u(x, y, t_0)}$$

u trenutku t_0. Uvjet tangencijalnosti:

$$\frac{dx}{u(t, x, y, z)} = \frac{dy}{v(t, x, y, z)} = \frac{dz}{w(t, x, y, z)}, \tag{2.1}$$

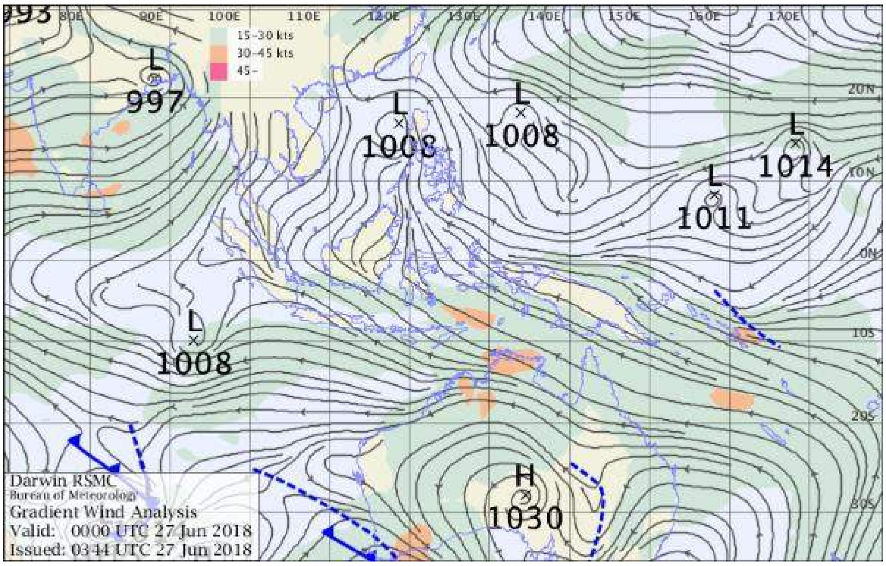
gdje je t vrijeme, u, v, w su komponente brzine u x, y, z smjeru. Za 2-dimenzionalni slučaj imamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}, \tag{2.2}$$

pri čemu dy/dx označava nagib strujnice, a v/u odgovara nagibu vektora brzine. Polje strujnica se određuje za svaki trenutak posebno (npr. $t - t_1$).
Općenito, strujnice$(t_1) \neq$ strujnice(t_2).

Veza između brzine vjetra i gradijenta tlaka ne vrijedi u ekvatorijalnom području jer je

Coriolisova sila toliko mala da je njen utjecaj zanemariv. Na ekvatoru je Coriolisova sila jednaka nuli, te je zanemariva do otprilike 15 stupnjeva geografske širine. Zbog toga se ne koriste polje tlaka da bi se prikazalo baričke sustave. Umjesto toga koriste se strujnice (analiza gradijentskog vjetra) da bi se pokazao smjer vjetra (Sl. 2.1).



Slika 2.1: Crne krivulje označavaju strujnice, odnosno smjer strujanja u vremenskom trenutku 00:00 UTC, 27. lipnja 2018. godine. Iznos brzine vjetra je označen bojom.

Praktični pristup u računanju strujnica:

- "zamrznemo" vrijeme i ubacimo marker - čest u "zamrznuto" polje brzine (u $T(x_0, y_0, z_0)$)
- gibanje markera koji je ubačen u $T(x_0, y_0, z_0)$ možemo opisati kao:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(\tau) = \vec{v}(t, \vec{x}(\tau)) \tag{2.3}$$
$$\vec{x}(\tau_0) = \vec{x}_0 \tag{2.4}$$

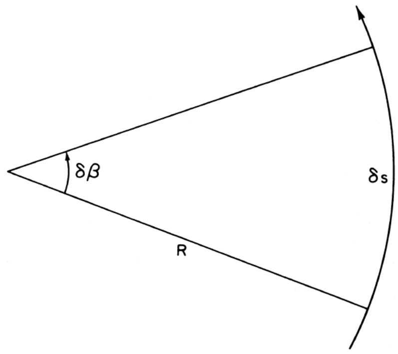
- fizikalno vrijeme t je fiksno (zamrznuto), a varijabla τ je pseudo-vrijeme
- strujnice su u stvari trajektorije markera koji se giba u polju "zamrznutih" brzina

U jednadžbi za gradijentski vjetar

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

, R se odnosi na zakrivljenost trajektorije čestí zraka. U praksi za R se često uzima zakrivljenost izobara (izohipsi) jer ih se može jednoznačno procijeniti pomoću sinoptičkih karata. Za gradijentsko strujanje izobare (tj. izohipse) odgovaraju strujnicama. Trajektorije $\equiv$ strujnice ako brzina ne ovisi eksplicitno o vremenu, tj. ako je strujanje stacionarno

Međutim, gibanja na sinoptičkoj skali (cilone i anticiklone) nisu stacionarna gibanja, već putuju brzinom koja je istog reda veličine kao i brzina vjetra u njima.
Stoga promatramo vezu između zakrivljenosti trajektorija i zakrivljenosti strujnica za barički sustav koji se giba da bismo procijenili pogrešku koju radimo kad koristimo zakrivljenost strujnica umjesto zakrivljenosti trajektorija..



Slika 2.2: Veza između kuta promjene smjera vjetra i radijusa zakrivljenosti.

- $\delta\beta$ je kut za koji se zakrene vjetar, tj. promjena smjera vjetra na izobarnoj plohi
- R_t je radijus zakrivljenosti trajektorije
- R_s je radijus zakrivljenosti strujnice

$$\delta s = R\delta\beta \qquad \Big/ \lim_{\delta s \to 0} \tag{2.5}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{R_t} \qquad \text{promjena smjera vjetra duž trajektorije} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial s} = \frac{1}{R_s} \qquad \text{promjena smjera vjetra dužstrujnice u nekom trenutku} \tag{2.7}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{V}{R_t}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\beta}{\partial t} + V\frac{\partial\beta}{\partial s} = \frac{\partial\beta}{\partial t} + V\frac{1}{R_s}$$

$$\frac{V}{R_t} = \frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{V}{Rs}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = V(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_s}) \tag{2.8}$$

Sada promotrimo kružne izobare koje se konstantnom brzinom c gibaju bez promjene oblika

- c je brzina kojom se giba sustav
- V je brzina vjetra, odnosno kružnog gibanja oko centra niskog ili visokog tlaka, tj. gradijentski vjetar

- U ovom slučaju izobare ≡ strujnice, a lokalno zakretanje vjetra nastaje samo zbog gibanja sustava strujnica tako da je:

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = -\vec{c}\cdot\nabla\beta = -c\cos\gamma\frac{\partial\beta}{\partial s} \tag{2.9}$$

  γ je kut između strujnice (izobare) i smjera gibanja sustava.

Iz jednadžbi (2.8) i (2.9) slijedi da je:

$$V(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_s}) = -c\cos\gamma\frac{1}{R_s} \tag{2.10}$$

$$R_s = R_t(1 - \frac{c}{V}\cos\gamma) \tag{2.11}$$

Primjer 1: Stacionarno 2-D strujanje

Brzina je dana kao: $\vec{v}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j} = [-y, x]$

$$\text{strujnice:} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{x}{-y} \Longrightarrow xdx + ydy = 0 \quad \Big/ \int$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (R > 0) \longrightarrow \text{koncentrične kružnice}$$

$$\text{trajektorije:} \qquad \frac{d}{dt}x = -y, \qquad x(0) = R$$

$$\frac{d}{dt}y = x, \qquad y(0) = 0$$

$$x(t) = R\cos(t), \qquad y(t) = R\sin(t)$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Primjer 2: Nestacionarno 2-D strujanje

Brzina je dana kao: $\vec{v}(x,y) = (-y-t)\vec{i} + x\vec{j} = [-y-t, x]$

$$\text{strujnice:} \qquad \frac{dx}{-y-t} = \frac{dy}{x} \Longrightarrow xdx = -(y+t)dy \qquad \Big/ \int$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} - ty + C \qquad \Big/ \cdot 2$$

$$x^2 = -y^2 - 2ty + c$$

$$x^2 = -(y+t)^2 + t^2 + c$$

$$x^2 + (y+t)^2 = t^2 + c \equiv R^2, \qquad c \geq -t^2$$

$\Longrightarrow$ Rješenja su koncentrične kružnice koje se gibaju duž osi y stalnom brzinom.

$$\text{trajektorije:} \qquad \frac{d}{dt}x = -y - t, \qquad x(0) = x_0$$
$$\frac{d}{dt}y = x, \qquad y(0) = y_0$$

$$x(t) = (x_0 + 1)\cos(t) - y_0 \sin t - 1$$
$$y(t) = (x_0 + 1)\sin(t) + y_0 \cos t - t$$

Neka je npr. $x_0 = -1$, te $y_0 = 0$, slijedi da je rješenje:

$$x(t) = -1, \qquad y(t) = -t$$

$\Longrightarrow$ Element fluida se giba ravno prema dolje duž vertikalnog pravca $x = -1$ brzinom -1

Iz ova dva primjera vidimo da strujnice i trajektorije mogu biti bitno različite.

2.1 Zadaci

1. Brzina je dana s:

$$\vec{v} = (1 + At + Bt^2)\vec{i} + x\vec{j}.$$

   (a) Nađite jednadžbu strujnice koja u $t = t_0$ prolazi kroz točku (x_0, y_0).

   (b) Nađite trajektoriju elementa fluida koji dolazi u (x_0, y_0) u $t = t_0$.

   (c) Pokažite da je za $A = 0$, $B = 0$ (tj. stacionarno strujanje) strujnica jednaka trajektoriji.

Rješenje:

(a) Komponente vektora brzine su:

$$u = 1 + At + Bt^2, \qquad v = x$$

Nagib strujnice dy/dx je jednak nagibu vektora brzine v/u.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{x}{1 + At + Bt^2}$$
$$t = t_0 : \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 + At_0 + Bt_0^2}$$

$$dy = \frac{x dx}{1 + At_0 + Bt_0^2} \qquad \Big/ \int_{x_0, y_0}^{x, y}$$

$$y - y_0 = \frac{1}{1 + At_0 + Bt_0^2} \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$$

$$(y - y_0)(1 + At_0 + Bt_0^2) = \frac{x^2 - x_0^2}{2} \qquad \underline{\text{strujnice}}$$

(b) Trajektorija = element fluida prolazi kroz (x_0, y_0) u $t = t_0$, a u nekom drugom trenutku t vrijedi

$$x = x(x_0, y_0, t); \qquad y = y(x_0, y_0, t)$$

$$\frac{dx}{dt} = u = 1 + At + Bt^2; \qquad \frac{dy}{dt} = v = x$$

$$dx = (1 + At + Bt^2)dt \qquad \Big/ \int_{x_0,t_0}^{x,t}$$

$$x - x_0 = (t - t_0) + A\frac{t^2 - t_0^2}{2} + B\frac{t^3 - t_0^3}{3}$$

Iz izraza za v komponentu brzine, nađemo jednadžbu za y:

$$\frac{dy}{dt} = v = x$$

$$\frac{dy}{dt} = x_0 + (t - t_0) + A\frac{t^2 - t_0^2}{2} + B\frac{t^3 - t_0^3}{3}$$

$$dy = \left[x_0 + (t - t_0) + A\frac{t^2 - t_0^2}{2} + B\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right]dt \qquad \Big/ \int_{t_0}^{t}$$

$$\begin{aligned} y - y_0 = x_0(t - t_0) + \frac{t^2 - t_0^2}{2} - t_0(t - t_0) + \\ + \frac{A}{2}\left[\frac{t^3 - t_0^3}{3} - t_0^2(t - t_0)\right] + \frac{B}{3}\left[\frac{t^4 - t_0^4}{4} - t_0^3(t - t_0)\right] \end{aligned}$$

Jednadžbe za x i y su parametarske jednadžbe trajektorije.

(c) Za $A = B$ slijedi da je:

Strujnica: $y - y_0 = \dfrac{x - x_0}{2}$

Trajektorija:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t - t_0 \\ y - y_0 &= \left[x_0 + \frac{t - t_0}{2} - t_0\right](t - t_0) \\ &\vdots \\ y - y_0 &= \frac{x^2 - x_0^2}{2} \end{aligned}$$

2. 2-D strujanje je dano s

$$\vec{v} = y\vec{i} + x\vec{j}.$$

Nađite strujnicu koja prolazi kroz točku (1,0).

Rješenje:
Jednadžba strujnice: $\vec{v} \times d\vec{s} = 0$

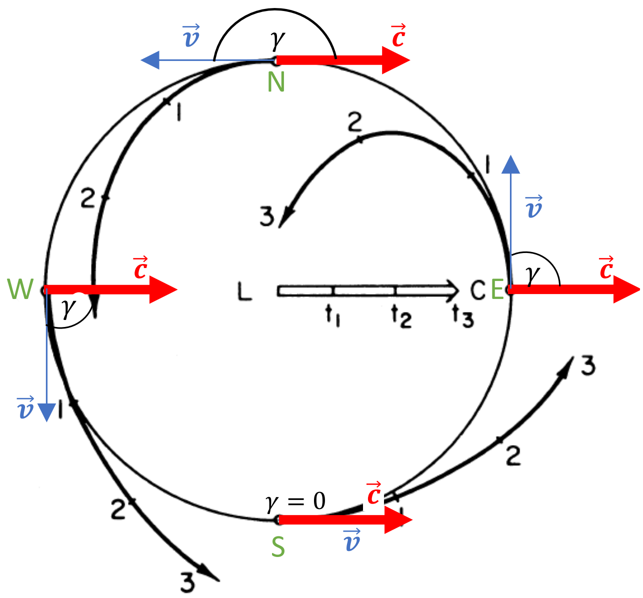
$$udy - vdx = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{x}{y}$$
$$ydy = -xdx \qquad \Big/ \int_{x_0,y_0}^{x,y}$$
$$x^2 + y^2 = K, \qquad K = const.$$

Za točku $(1,0)$ slijedi da je $K = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$

3. Odredite radijus zakrivljenosti trajektorija česti zraka smještenih 500 km (a) istočno, (b) sjeverno, (c) južno i (d) zapadno od centra kružne ciklone. Ciklona se giba prema istoku brzinom 15 m s^{-1}. Pretpostavite da je strujanje unutar ciklone geostrofičko s jednolikom tangencijalnom brzinom vjetra od 15 m s^{-1}.
Rješenje:

$R = 500$ km
$c = 15$ m s^{-1}
$v_g = V = 15$ m s^{-1}

$R_t = ?$



Budući da je geostrofičko strujanje stacionarno, strujnice=izobare.

Stoga je, $R_s = R = 500$ km. $\frac{V}{c} = 1$

Na skici su prikazani položaji česti zraka koje se nalaze istočno, sjeverno, južno i zapadno od centra ciklone. L označava minimum tlaka u centru ciklone. Brojevi 1, 2, 3 označavaju položaje u sukcesivnim vremenskim trenucima. Izraz za radijus zakrivljenosti trajektorije je:

$$R_t = \frac{R_s}{1 - \frac{c}{V}\cos\gamma}$$

(a) $\gamma = 90^o$, odnosno $\cos\gamma = 0$, pa slijedi da je $R_t = 500$ km

(b) $\gamma = 180^o$, odnosno $\cos\gamma = -1$, pa slijedi da je $R_t = 250$ km

(c) $\gamma = 0^o$, odnosno $\cos\gamma = 1$, pa slijedi da je $R_t = \infty$

(d) $\gamma = 270^o$, odnosno $\cos\gamma = 0$, pa slijedi da je $R_t = 500$ km

4. Nađite brzine gradijentskog vjetra za česti zraka iz prethodnog zadatka koristeći dobivene vrijednosti za R_t iz prethodnog zadatka. Usporedite te brzine s brzinama geostrofičkog vjetra, a vrijednost Coriolisovog parametra je 10^{-4} s^{-1}.

   Rješenje:

   Izraz za gradijentski vjetar je:

$$V_{grad} = -\frac{fR_t}{2} + \sqrt{\frac{f^2R_t^2}{2} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$$

   Izraz za geostrofički vjetar u PKS-u:

$$v_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \longrightarrow \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = -fRv_g$$

   Slijedi da je:

$$V_{grad} = -\frac{fR_t}{2} + \sqrt{\frac{f^2R_t^2}{2} + fR_tv_g},$$

   pri čemu je $v_g = 15$ m s^{-1}.

   (a) Za česti istočno od centra ciklone $R_t = 500$ km: $V_{grad} = 12.1$ m s^{-1}

   (b) Za česti sjeverno od centra ciklone $R_t = 250$ km: $V_{grad} = 10.5$ m s^{-1}

   (c) Za česti južno od centra ciklone $R_t \to \infty$: $V_{grad} = v_g$ budući da znamo da je veza između ova dva tipa strujanja dana sljedećim izrazom:

$$v_g = \frac{V_{grad}^2}{fR_t} + V_{grad}$$

   (d) Za česti zapadno od centra ciklone $R_t = 500$ km: $V_{grad} = 12.1$ m s^{-1}

3. Geostrofička devijacija (ageostrofički vjetar)

Horizontalna jednadžba gibanja glasi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\nabla p - f\vec{k}\times\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{F}_{tr} \qquad \Big/ f^{-1}, \vec{k}\times \tag{3.1}$$

Trenje zanemarujemo, pa slijedi da imamo:

$$\frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{f}\vec{k}\times\nabla p - \vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{v})$$

$$\frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}_g + \vec{v}$$

$$\vec{v} - \vec{v}_g = \vec{v}_a = \frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{ageostrofiki vjetar} \tag{3.2}$$

$\Longrightarrow$ ageostrofički vjetar predstavlja odstupanje stvarnog vjetra od geostrofičkog. Iz jednažbe 3.2 vidimo da ageostrofički vjetar postoji kad postoji i ubrzanje stvarnog vjetra, tj. $\frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$.

Iznad atmosferskog graničnog sloja atmosfera je u pravilu u **kvazigeostrofičkoj ravnoteži**. Pogledajmo sad koji su razlozi zbog kojih dolazi do odstupanja od geostrofije. Iz teorije znamo da premda $\vec{v} \neq \vec{v_g}$ parcijalne derivacije stvarnog i geostrofičkog vjetra su približno iste:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \approx \frac{\partial\vec{v}_g}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial s} \approx \frac{\partial\vec{v}_g}{\partial s}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \approx \frac{\partial\vec{v}_g}{\partial z}$$

Prema tome, slijedi da je:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v_g}}{\partial t} + v\frac{\partial\vec{v_g}}{\partial s} + w\frac{\partial\vec{v_g}}{\partial z} \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem jedn. 3.3 u jedn. 3.2, dolazimo do izraza za odstupanje od geostrofičke ravnoteže:

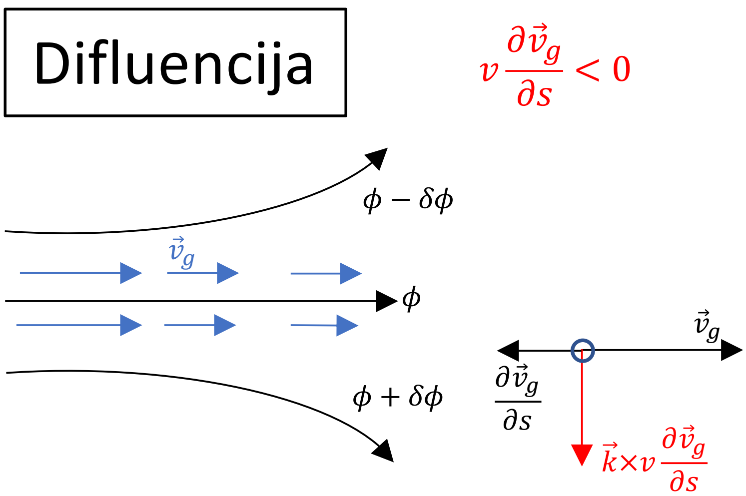
$$\vec{v}_a = \vec{v} - \vec{v}_g = \underbrace{\frac{1}{f}\vec{k} \times \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial t}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{1}{f}\vec{k} \times v\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial s}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\frac{1}{f}\vec{k} \times w\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z}}_{\mathrm{III}} \tag{3.4}$$

Promotrimo pojedinačno članove (I), (II) i (III) iz jedn. 3.4.

- $$\text{Član (I)} = \frac{1}{f}\vec{k} \times \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\rho f}\vec{k} \times \nabla_h p\right] = -\frac{1}{\rho f^2}\nabla_h \frac{\partial p}{\partial t}$$

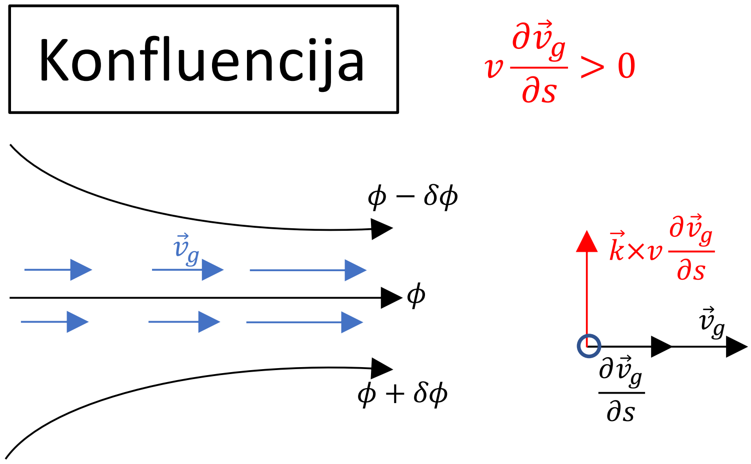
  Član koji uključuje prostorne promjene tendencije tlaka ($\nabla_h \frac{\partial p}{\partial t}$) nazivamo **izalobarički vjetar**.

- $\text{Član (II)} = \frac{1}{f}\vec{k}\times v\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial s}$ označava da do geostrofičke devijacije dolazi zbog promjene geostrofičkog vjetra uzduž strujnica.



Kod difluencije imamo horizontalnu konvergenciju geostrofičkog vjetra. Ovdje imamo zakretanje stvarnog vjetra prema višem tlaku (protivno gradijentu tlaka) te zbog toga vjetar nužno usporava još više nego samo zbog konvergencije.

Kod konfluencije imamo horizontalnu divergenciju geostrofičkog vjetra. Ovdje imamo zakretanje stvarnog vjetra prema nižem tlaku te zbog toga vjetar ubrzava. Ovo je česta pojava kod ciklona - strujanje zakreće prema centru niskog tlaka.



- Član (III) $= \frac{1}{f}\vec{k}\times w\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z}$ označava da do geostrofičke devijacije dolazi zbog vertikalnog smicanja geostrofičkog vjetra.

3.1 Zadaci

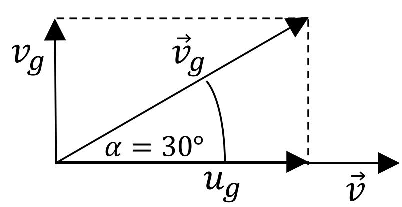
1. Koliko je ubrzanje česti zraka ako je $v_g = 8.7$ m s $^{-1}$, te ako je kut između geostrofičkog i stvarnog vjetra 30^o (pri čemu je $\vec{v}_g$ otklonjen ulijevo od $\vec{v}$). Brzina stvarnog vjetra je $v = 10$ m s^{-1}, a geografska širina je $\phi = 60$ ^{o}N.
Rješnje:

Geostrofička devijacija je:

$$\vec{v} - \vec{v}_g = \vec{v}_a = \frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \Big/ \vec{k}\times$$

$$\vec{k}\times(\vec{v}-\vec{v}_g) = -\frac{1}{f}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -f\vec{k}\times(\vec{v}-\vec{v}_g) = f(\vec{v}-\vec{v}_g)\times\vec{k}$$



Iz skice na desnoj strani slijedi da je: $\vec{v} = 10\vec{i}$

Vektor geostrofičkog vjetra:

$$\vec{v}_g = 8.7\cos 30\vec{i} + 8.7\sin 30\vec{j} = 7.53\vec{i} - 4.35\vec{j}$$

Slijedi da je: $\vec{v} - \vec{v}_g = 2.47\vec{i} - 4.35\vec{j}$

Imamo da je ubrzanje česti zraka:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = f(\vec{v} - \vec{v}_g) \times \vec{k} = f \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2.47 & -4.35 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \sin 60(-4.35\vec{i} - 2.47\vec{j})$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 1.26 \cdot 10^{-4}(-4.35\vec{i} - 2.47\vec{j}) \text{ m s}^{-2}$$

Slijedi da je iznos ubrzanja česti zraka:

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = 6.32 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$$

2. Pokažite da se izalobarički vjetar u (x, y, p) sustavu može prikazati kao:

$$\vec{v}_{izl} = -\frac{1}{f^2}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Rješenje:
Ageostrofički vjetar je:

$$\vec{v} - \vec{v}_g = \vec{v}_a = \frac{1}{f}\vec{k} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v}_a = \frac{1}{f}\vec{k} \times \frac{\partial\vec{v}_g}{\partial t} + \frac{1}{f}\vec{k} \times v\frac{\partial\vec{v}_g}{\partial s} + \frac{1}{f}\vec{k} \times w\frac{\partial\vec{v}_g}{\partial z}$$

Izalobarički član (vjetar) je prvi član na desnoj strani:

$$\vec{v}_{izl} = \frac{1}{f}\vec{k} \times \frac{\partial\vec{v}_g}{\partial t} = \frac{1}{f}\vec{k} \times \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p\Phi\right] = \frac{1}{f^2}\vec{k} \times \frac{\partial}{\partial t}(\vec{k} \times \nabla_p\Phi)$$

$$\frac{1}{f}\vec{k} \times \frac{\partial\vec{v}_g}{\partial t} = \frac{1}{f^2}\vec{k} \times (\vec{k} \times \nabla_p\frac{\partial\Phi}{\partial t}) = -\frac{1}{f^2}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

3. Pokažite da se izalobarički vjetar u izentropskom sustavu može prikazati kao:

$$\vec{v}_{izl} = -\frac{1}{f^2}\nabla_\theta\frac{\partial M}{\partial t}, \qquad M = c_pT + \Phi$$

Rješenje:
Jedandžba gibanja u sustavu s generaliziranom koordinatom glasi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\nabla_\xi p - \nabla_\xi\Phi - f\vec{k} \times \vec{v}$$

generaliziranu koordinatu (ξ) zamijenimo s θ jer se traži izalobarički vjetar u izentropskom sustavu.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\nabla_\theta p - \nabla_\theta \Phi - f\vec{k}\times\vec{v}$$

$$\text{Izraz za potencijalnu temperaturu: } \theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}} \qquad \Big/ ln, \nabla_\theta$$

$$\underbrace{\frac{1}{\theta}\nabla_\theta\ \theta}_{=0} = \frac{1}{T}\nabla_\theta\ T - \frac{R}{c_p p}\nabla_\theta p$$

$$\frac{1}{T}\nabla_\theta\ T = \frac{R\alpha}{c_p RT}\nabla_\theta p$$

$$c_p\nabla_\theta T = \alpha\nabla_\theta p$$

Uvrstimo ovaj izraz za $\alpha\nabla_\theta p$ u jednadžbu za akceleraciju:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -c_p\nabla_\theta T - \nabla_\theta\Phi - f\vec{k}\times\vec{v} = -\nabla_\theta\underbrace{(c_pT + \Phi)}_{M} - f\vec{k}\times\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla_\theta M - f\vec{k}\times\vec{v} \qquad \Big/ \frac{1}{f}\vec{k}\times$$

$$\frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{f}\vec{k}\times\nabla_\theta M + \vec{v}$$

Znamo da je za $d\vec{v}/dt = 0$ stvarni vjetar jednak geostrofičkom ($\vec{v} = \vec{v}_g$), pa iz ove jednadžbe nalazimo da je $\vec{v}_g$ jednako:

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f}\vec{k}\times\nabla_\theta M$$

Definicija izalobaričkog vjetra:

$$\vec{v}_{izl} = \frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{\partial\vec{v}_g}{\partial t},$$

te uvrštavanjem izraza za $\vec{v}_g$ slijedi da je:

$$\vec{v}_{izl} = \frac{1}{f}\vec{k}\times\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f}\vec{k}\times\nabla_\theta M\right) = -\frac{1}{f^2}\nabla_\theta\frac{\partial M}{\partial t}$$

4. Termalni vjetar

Termalni vjetar predstavlja vertikalno smicanje geostrofičkog vjetra. Da bismo izveli izraz za termalni vjetar, krećemo od poznatog izraza za geostrofički vjetar.

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p \Phi \qquad \Big/ \frac{\partial}{\partial p} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial t} = \frac{1}{f}\vec{k} \times \frac{\partial}{\partial t}\nabla_p \Phi = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p \frac{\partial \Phi}{\partial p} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p} \tag{4.3}$$

$$\vec{v}_g = -\frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p \frac{RT}{p} = -\frac{R}{pf}\vec{k} \times \nabla_p T \qquad \Big/ \int_{p_1}^{p_2} \partial p \tag{4.4}$$

$$\vec{v}_{g_2} - \vec{v}_{g_1} = -\frac{R}{f}\int_{p_1}^{p_2} \vec{k} \times \nabla_p T \frac{dp}{p} \tag{4.5}$$

Termalni vjetar je definiran kao $\vec{v}_T = \vec{v}_{g_2} - \vec{v}_{g_1}$, te ako na lijevu stranu uvrstimo jednadžbu 4.1 slijedi da je:

$$\vec{v}_T = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p (\Phi_2 - \Phi_1) \tag{4.6}$$

$$\vec{v}_T = -\frac{R}{f}\int_{p_1}^{p_2} \vec{k} \times \nabla_p T (d \ln p) \tag{4.7}$$

Uz pretpostavku da je $T = \overline{T} = const.$ slijedi:

$$\vec{v}_T = -\frac{R}{f}\vec{k} \times \nabla_p \overline{T} \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{4.8}$$

$$\vec{v}_T = \frac{R}{f} \ln \frac{p_1}{p_2}\vec{k} \times \nabla_p \overline{T} \tag{4.9}$$

Prema tome, termalni vjetar predstavlja vezu između horizontalne promjene temperature (tj. mase) i vertikalne promjene u polju strujanja. Termalni vjetar je teorijsko strujanje, a ne realno.

$$\vec{v}_T = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p(\Phi_2 - \Phi_1) = -\frac{R}{f}\ln\frac{p_2}{p_1}\vec{k} \times \nabla_p\overline{T} \tag{4.10}$$

Pomnožimo gornju jednadžbu s $\vec{k}\times$:

$$-\frac{1}{f}\nabla_p\delta\Phi = \frac{R}{f}\ln\frac{p_2}{p_1}\nabla_p\overline{T} \tag{4.11}$$

pri čemu je $\delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ debljina sloja između p_1 i p_2

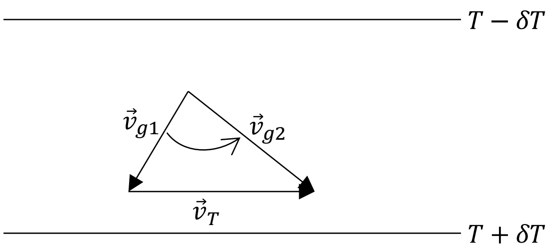
$$\nabla_p\delta\Phi = -R\ln\frac{p_2}{p_1}\nabla_p\overline{T} \tag{4.12}$$

$$\nabla_p\delta\Phi = R\ln\frac{p_1}{p_2}\nabla_p\overline{T} \tag{4.13}$$

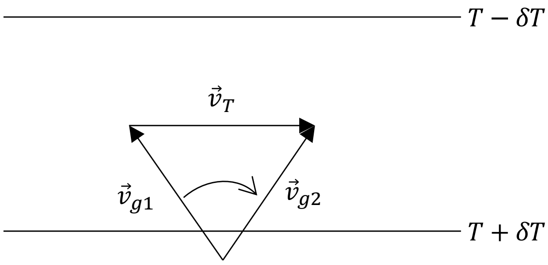
$$\nabla_p\delta\Phi = \nabla_p(R\ln\frac{p_1}{p_2}\overline{T}) \Rightarrow \tag{4.14}$$

$$\delta\Phi = \overline{T}R\ln\frac{p_1}{p_2} \tag{4.15}$$

Iz jednadžbe 4.15 slijedi da je $\delta\Phi$ debljina sloja između p_1 i p_2 proporcionalna srednjoj temperaturi sloja. Na sjevernoj hemisferi termalni vjetar "puše" tako da mu je topli zrak s desne strane.



skretanje $\vec{v}_g$ visinom u smjeru suprotnom od kazaljke na satu $\Rightarrow$ **hladna advekcija**



skretanje $\vec{v}_g$ visinom u smjeru kazaljke na satu (anticiklonalno) $\Rightarrow$ **topla advekcija**

4.1 Zadaci

1. Izolinije RT_{1000}^{500} izvučene su svakih 60 gpm. Koji je odgovarajući interval izolinija vertikalno usrednjene temperature?
   Rješenje:
   $\delta\Phi$=60 gpm=60 $\cdot$ 9.8 J kg^{-1}
   $p_1 = 1000$ hPa, $p_2 = 500$ hPa

Izraz za termalni vjetar:

$$\vec{v}_T = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p(\Phi_2 - \Phi_1) = -\frac{R}{f}\ln\frac{p_2}{p_1}\vec{k} \times \nabla_p\overline{T} \qquad \Big/ \vec{k}\times$$

$$-\frac{1}{f}\nabla_p(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{R}{f}\ln\frac{p_2}{p_1}\nabla_p\overline{T} \qquad \Big/ (-f)$$

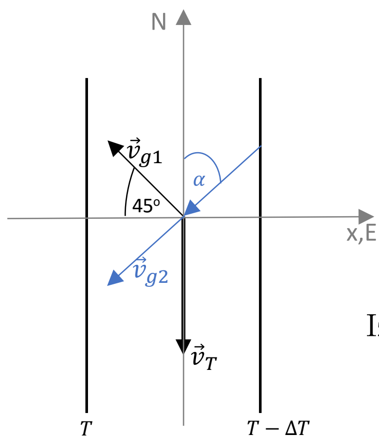
$$\nabla_p(\Phi_2 - \Phi_1) = R\ln\frac{p_1}{p_2}\nabla_p\overline{T}$$

$$\nabla_p(\delta\Phi) = R\ln\frac{p_1}{p_2}\nabla_p\overline{T}$$

$$\frac{\delta\Phi}{\Delta n} = R\ln\frac{p_1}{p_2}\frac{\Delta\overline{T}}{\Delta n} \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta T = 2.95 \text{ K} = 3 \text{ K}$$

2. Srednja temperatura u sloju između 750 i 500 hPa opada prema istoku za 3 ^{o}C po 100 km. Ako je na 750 hPa plohi jugoistočni geostrofički vjetar brzine v_{g1}=20 m s^{-1}, koliki je v_{g2} na 500 hPa? $f = 10^{-4}$ s^{-1}.
   Rješenje:
   $\nabla_p\overline{T} = -3°$ C/100 km $\vec{i}$
   v_{g1}=20 m s^{-1}, $p_1 = 750$ hPa, $p_2 = 500$ hPa



$$\vec{v}_T = \vec{v}_{g2} - \vec{v}_{g1} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{g2} = \vec{v}_T + \vec{v}_{g1}$$

$$\vec{v}_{g1} = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}20\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}20\vec{j}\Big) \text{ m s}^{-1}$$

$$\vec{v}_{g1} = Big(-10\sqrt{2}\vec{i} + 10\sqrt{2}\vec{j}\Big) \text{ m s}^{-1}$$

$$\vec{v}_T = -|\vec{v}_T|\vec{j}$$

Izraz za termalni vjetar:

$$\vec{v}_T = \frac{R}{f}\ln\frac{p_1}{p_2}\vec{k} \times \nabla_p\overline{T}$$

$$\vec{v}_T = \frac{R}{f}\ln\frac{p_1}{p_2}\vec{k} \times \Big(-\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\Big)\vec{i} = -34.9\vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

$$\vec{v}_{g2} = \vec{v}_T + \vec{v}_{g1} = (-34.9\vec{j} - 10\sqrt{2}\vec{i} + 10\sqrt{2}\vec{j}) \text{ m s}^{-1}$$

$$\vec{v}_{g2} = (-10\sqrt{2}\vec{i} - 20.8\vec{j}) \text{ m s}^{-1}$$

$$|\vec{v}_{g2}| = 25.2 \text{ m s}^{-1}$$

Određujemo smjer vjetra na 500 hPa:

$$\tan\alpha = \left|\frac{\vec{v}_{g2,x}}{\vec{v}_{g2,y}}\right| \Rightarrow \alpha = 34.2^\circ$$

3. Odredite brzinu termalnog vjetra u sloju debljine 2 km ako je horizontalni temperaturni gradijent 2.5^{o}C/150 km, a srednja temperatura sloja 27 ^{o}C, ϕ=45^o N.
   Rješenje:
   $\Delta z = 2$ km
   $\nabla_p \overline{T} = 2.5^o$C/150 km
   $\bar{t} = 27$ ^{o}C, $\phi = 45^o$ N

   Izraz za termalni vjetar:
   $$\vec{v}_T = \frac{R}{f}\ln\frac{p_1}{p_2}\vec{k}\times\nabla_p\overline{T}$$
   Da bismo našli brzinu v_T, odredimo čemu je jednako $\ln\frac{p_1}{p_2}$ koristeći jednadžbu za hidrostatičku ravnotežu.
   $$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{pg}{RT}$$
   $$\frac{1}{p}\partial p = -\frac{g}{RT}\partial z \qquad \Big/ \int_{p_1}^{p_2}, \int_z^{z+\Delta z}$$
   $$\ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{g\Delta z}{R\overline{T}} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{p_1}{p_2} = \frac{g\Delta z}{R\overline{T}}$$
   Pa slijedi da je:
   $$\vec{v}_T = \frac{R}{f}\frac{g\Delta z}{R\overline{T}}\vec{k}\times\nabla_p\overline{T}$$
   $$|\vec{v}_T| = \frac{g\Delta z}{f\overline{T}}|\nabla_p\overline{T}| = 11.6 \text{ m s}^{-1}$$

4. Usporedite termalni vjetar na polu i na ϕ=30^o ako su svi ostali uvjeti isti.
   Rješenje:
   Izraz za termalni vjetar:
   $$\vec{v}_T = \frac{R}{2\Omega\sin\phi}\ln\frac{p_1}{p_2}\vec{k}\times\nabla_p\overline{T}$$
   $$\frac{\vec{v}_{T,pol}}{\vec{v}_{T,30^o}} = \frac{\frac{1}{\sin 90^o}}{\frac{1}{\sin 30^o}} = \sin 30^o = 1/2$$

5. Na kojoj visini iščezava geostrofički vjetar na $\phi = 40^o$ N, ako je na 500 m geostrofički vjetar brzine 6 m s^{-1}, a horizontalni gradijent temperature 2^{o}C/100 km uz $\overline{T}$=273 K.
   Rješenje:

$v_{g2} = 0$ m s^{-1}
$\phi = 40°$ N, $v_{g1} = 5$ m s^{-1}
$\nabla_p T = 2°$ C/100 km, $\overline{T} = 273$ K

Izraz za termalni vjetar:

$$\vec{v}_T = \vec{v}_{g2} - \vec{v}_{g1} = \frac{R}{f} \ln \frac{p_1}{p_2} \vec{k} \times \nabla_p \overline{T}$$

Iz prethodnih zadataka znamo da vrijedi:

$$\vec{v}_{g2} - \vec{v}_{g1} = \frac{g\Delta z}{f\overline{T}} \vec{k} \times \nabla_p \overline{T}$$

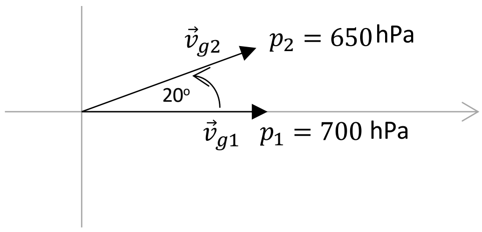
$$|\vec{v}_{g1}| = \frac{g\Delta z}{f\overline{T}} |\nabla_p \overline{T}| \quad \Rightarrow \Delta z = \frac{f\overline{T}}{g|\nabla_p \overline{T}|} |\vec{v}_{g1}|$$

$$\Delta z = 782.4m \quad \Rightarrow z_2 = z_1 + \Delta z = 500 \text{ m} + 782.4 \text{ m} = 1282.4 \text{ m}$$

6. Nađite geostrofičku advekciju temperature u točki na 700 hPa, $\phi = 50°$ N ako je brzina vjetra u toj točki 17 m s^{-1}, a vjetar visinom zakreće ciklonalno za 20°/50 hPa ne mijenjajući brzinu.

Rješenje:
$|\vec{v}_{g1}| = |\vec{v}_{g2}|$
Advekcija temperature: $-\vec{v}_g \cdot \nabla_p \overline{T} =$**?**

Koordinatni sustav je proizvoljno odabran, odnosno geostrofički vjetar puše prema istoku na 700 hPa.



$$\vec{v}_{g1} = 17\vec{i}$$

$$\vec{v}_{g2} = 17 \cos 20° \vec{i} + 17 \sin 20° \vec{j}$$

Termalni vjetar: $\vec{v}_T = \vec{v}_{g2} - \vec{v}_{g1} = -1.025\vec{i} + 5.814\vec{j}$
Pa slijedi:

$$\vec{v}_T = \vec{v}_{g2} - \vec{v}_{g1} = \frac{R}{f} \ln \frac{p_1}{p_2} \vec{k} \times \nabla_p \overline{T}$$

$$-1.025\vec{i} + 5.814\vec{j} = 1.904 \cdot 10^5 \vec{k} \times \nabla_p \overline{T} \qquad \Big/ \vec{k}\times$$

$$-1.025\vec{j} - 5.814\vec{i} = -1.904 \cdot 10^5 \nabla_p \overline{T}$$

$$\nabla_p \overline{T} = 3.053 \cdot 10^{-5} \vec{i} + 5.383 \cdot 10^{-6} \vec{j}$$

Geostrofička advekcija temperature na 700 hPa:

$$-\vec{v}_{g1} \cdot \nabla_p \overline{T} = -17\vec{i}(3.053 \cdot 10^{-5}\vec{i} + 5.383 \cdot 10^{-6}\vec{j})$$

$$-\vec{v}_{g1} \cdot \nabla_p \overline{T} = -5.19 \cdot 10^{-4}\ °\mathrm{C/s} = -1.87\ °\mathrm{C/h} \quad \text{(hladna advekcija)}$$

7. Nađite smjer i brzinu geostrofičkog vjetra na 1000 hPa ako je vjetar na 500 hPa sjeverni iznosa 17 m s^{-1}, a relativni geopotencijal RT$^{500}_{1000}$ raste u smjeru od sjevera prema jugu za 10 gpm/100 km, ϕ je 60° N.

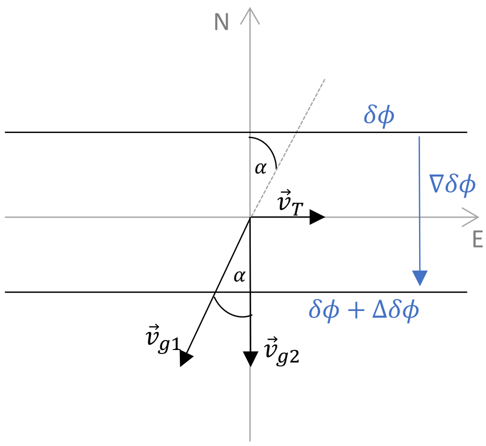
Rješenje:

$p_1 = 1000$ hPa, $p_2 = 500$ hPa
$\vec{v}_{g2} = -17$ m s$^{-1}\vec{j}$
$\mathrm{RT}^{500}_{1000} = \delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$
$\nabla\delta\Phi = -10$ gpm/100 km$\vec{j} = -9.8 \cdot 10^{-4}$ m s$^{-2}\vec{j}$

Termalni vjetar: $\vec{v}_T = \vec{v}_{g2} - \vec{v}_{g1}$
Uvrstimo izraz za geostrofički vjetar:

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p \Phi$$

Slijedi da je: $\vec{v}_T = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p \delta\Phi$



$$\vec{v}_{g1} = \vec{v}_{g2} - \vec{v}_T$$

$$\vec{v}_{g1} = -17\vec{j} - \frac{1}{f}\vec{k} \times (-9.8 \cdot 10^{-4})\vec{j} = -7.76\vec{i} - 17\vec{j}$$

Slijedi da je brzina geostrofičkog vjetra na 1000 hPa: $|\vec{v}_{g1}| = 18.69$ m s^{-1}

$$\text{Smjer vjetra na 1000 hPa je: } \tan\alpha = \left|\frac{v_{g1,x}}{v_{g1,y}}\right| = \frac{7.76}{17} = 0.4555 \Rightarrow$$

$$\alpha = 24.5° \quad \rightarrow \text{ NNE}$$

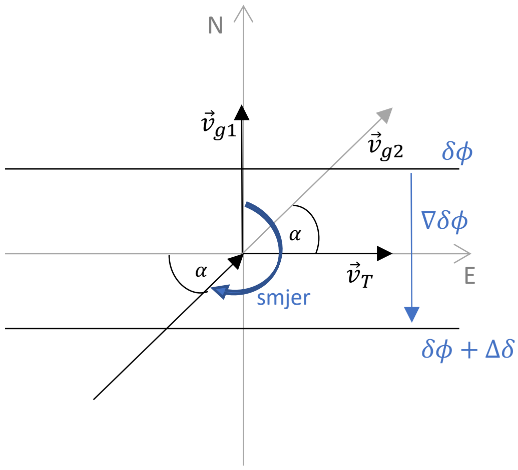
8. Nađite smjer i brzinu geostrofičkog vjetra na 500 hPa ako je geostrofički vjetar na 1000 hPa južni brzine $v_{g1} = 10$ m s^{-1}. Izohipse RT$^{500}_{1000}$ su paralelne s geografskim paralelama. Udaljenost izohipsi na karti je 1.5 cm, a mjerilo karte je 1:1.5$\cdot$10^7. Izohipse se crtaju svakih 40 gpm, a relativni geopotencijal raste prema jugu, ϕ je 55° N.

Rješenje:

$p_1 = 1000$ hPa, $p_2 = 500$ hPa

$\vec{v}_{g1} = 10 \text{ m s}^{-1}\vec{j}$
$\Delta\delta\Phi = 40$ gpm, $\Delta n = 1.5$ cm $\cdot 1.5 \cdot 10^7$
$\frac{\Delta\delta\Phi}{\Delta n} = -\frac{\Delta\delta\Phi}{\Delta n}\vec{j}$

Termalni vjetar: $\vec{v}_T = \vec{v}_{g2} - \vec{v}_{g1}$
Uvrstimo izraz za geostrofički vjetar:



$$\vec{v}_g = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p \Phi$$

Slijedi da je: $\vec{v}_T = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p \delta\Phi$

$$\vec{v}_T = \frac{1}{f}\vec{k} \times \left(-\frac{\Delta\delta\Phi}{\Delta n}\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}_T = \frac{1}{f}\frac{\Delta\delta\Phi}{\Delta n}\vec{i}$$

$$\vec{v}_T = \frac{1}{2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \sin 55°} \frac{40 \cdot 9.8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{1.5 \cdot 10^{-2} \cdot 1.5 \cdot 10^7 \text{ m}}\vec{i}$$

$$\vec{v}_T = 14.59\vec{i} \text{ m s}^{-1}$$

Brzina geostrofičkog vjetra na 500 hPa: $\vec{v}_{g2} = \vec{v}_{g1} + \vec{v}_T$

$$\vec{v}_{g2} = (14.59\vec{i} + 10\vec{j}) \text{ m s}^{-1}$$

Kut α je kut između $\vec{v}_{g2}$ i jediničnog vektora smjera $\vec{i}$. Slijedi da je α:

$$\tan\alpha = \frac{v_{g2,y}}{v_{g2,x}} = \frac{10}{14.59} = 0.685 \Rightarrow \alpha = 34.4°$$

Smjer geostrofičkog vjetra na 500 hPa: $270° - \alpha = 235.6° \rightarrow$ WSW

9. Pokažite da se promjena geostrofičkog vjetra visinom u izentropskim koordinatama može prikazati kao:

$$\frac{\partial\vec{v}_g}{\partial\theta} = \frac{R}{fp}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p}\vec{k} \times \nabla_\theta p$$

Rješenje:
Geostrofički vjetar u (x, y, θ) sustavu glasi:

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta(c_pT + \Phi)$$

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta (c_p T) + \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta \Phi \qquad \Big/ \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial \theta} = \underbrace{\frac{c_p}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}}_{I} + \underbrace{\frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}}_{II}$$

Da bismo našli $\partial T/\partial\theta$ u članu (I) koristimo izraz za potencijalnu temperaturu:

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}} \qquad \Big/ \ln$$

$$\ln\theta = \ln T + \frac{R}{c_p}\ln p_0 - \frac{R}{c_p}\ln p \qquad \Big/ \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial\theta} - \frac{R}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{T}{\theta} + \frac{RT}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial\theta}$$

U drugom članu izraz $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$ odredimo iz poznatog izraza za hidrostatičku ravnotežu:

$$\partial p = -\rho\partial\Phi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial\theta} = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial\theta}$$

Pa slijedi da je:

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial \theta} = \frac{c_p}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta\left[\frac{T}{\theta} + \frac{\overbrace{RT}^{p\alpha}}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right] - \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta \alpha\frac{\partial p}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial \theta} = \frac{c_p}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta \frac{T}{\theta} + \underbrace{\frac{c_p}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta \frac{p\alpha}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial\theta} - \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_\theta \alpha\frac{\partial p}{\partial\theta}}_{=0}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial \theta} = \frac{c_p}{f\theta}\vec{k} \times \nabla_\theta T = \frac{c_p}{fT\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}}\vec{k} \times \nabla_\theta T$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial \theta} = \frac{c_p}{f\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}}\left(\vec{k} \times \nabla_\theta \ln T\right)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial \theta} = \frac{c_p}{f}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}}\vec{k} \times \nabla_\theta\left[\ln\theta - \frac{R}{c_p}\ln p_0 + \frac{R}{c_p}\ln p\right]$$

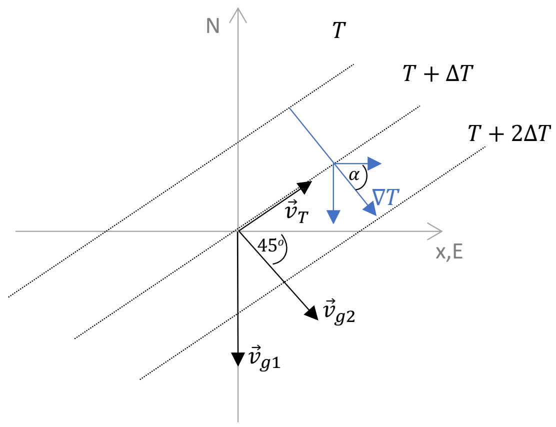
$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial \theta} = \frac{c_p}{f}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}}\vec{k} \times \left[\underbrace{\nabla_\theta \ln\theta}_{=0} - \underbrace{\frac{R}{c_p}\nabla_\theta \ln p_0}_{=0} + \frac{R}{c_p}\nabla_\theta \ln p\right]$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial \theta} = \frac{R}{fp}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}}\vec{k} \times \nabla_\theta p$$

10. Odredite srednji temperaturni horizontalni gradijent u sloju između $z_1 = 1$ km i $z_2 = 2$ km na $\phi = 60°$ N, ako je srednja temperatura sloja $\overline{T} = 27$ °C. Odredite smjer gradijenta temperature ako je vjetar na z_2 sjeverozapadni $v_2 = 8$ m s^{-1}, a na visini z_1 sjeverni $v_1 = 10$ m s^{-1}.

Rješenje:

$z_1 = 1$ km i $z_2 = 2$ km
$\phi = 60°$ N
$\overline{T} = 27$ °C $= 300$ K
$v_1 = 10$ m s^{-1}, $v_2 = 8$ m s^{-1}



Izraz za termalni vjetar:

$$\vec{v}_T = \frac{R}{f} \ln \frac{p_1}{p_2} \vec{k} \times \nabla_p \overline{T}$$

Da bismo našli brzinu v_T, odredimo čemu je jednako $\ln \frac{p_1}{p_2}$ koristeći jednadžbu za hidrostatičku ravnotežu.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{pg}{RT}$$

$$\frac{1}{p}\partial p = -\frac{g}{RT}\partial z \qquad \Big/ \int_{p_1}^{p_2}, \int_{z_1}^{z_2}$$

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g\Delta z}{R\overline{T}} \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{g\Delta z}{R\overline{T}}$$

Pa slijedi da je:

$$\vec{v}_T = \frac{R}{f}\frac{g\Delta z}{R\overline{T}} \vec{k} \times \nabla_p \overline{T} \qquad \Big/ \vec{k} \times$$

$$\vec{k} \times \vec{v}_T = -\frac{g\Delta z}{f\overline{T}} \vec{k} \times \nabla_p \overline{T} \quad \rightarrow \quad \nabla_p \overline{T} = -\frac{f\overline{T}}{g\Delta z} \vec{k} \times \vec{v}_T$$

$$\nabla_p \overline{T} = -\frac{f\overline{T}}{g\Delta z} \vec{k} \times (\vec{v_2} - \vec{v_1})$$

Na nivou z_1 vjetar je sjeverni: $\vec{v_1} = -10\vec{j}$ m s^{-1}
Na nivou z_2 vjetar je sjeverozapadni: $\vec{v_2} = (4\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j})$ m s^{-1}

Slijedi da je: $\vec{v_2} - \vec{v_1} = (5.66\vec{i} + 4.34\vec{j})$ m s^{-1} $\quad \rightarrow \quad \left|\vec{v_T}\right| = 7.13$ m s^{-1}

$$\nabla_p \overline{T} = -\frac{2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1} \sin 60 \cdot 300 \text{ K}}{9.81 \text{ m s}^{-2} \cdot 10^3 \text{ m}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 5.66 & 4.34 & 0 \end{vmatrix} = (1.68\vec{i} - 2.19\vec{j}) \frac{^\circ C}{100 \text{ km}}$$

$$|\nabla_p \overline{T}| = 2.76 \frac{^\circ C}{100 \text{ km}}$$

Smjer gradijenta temperature je:

$$\tan \alpha = \frac{\left| \partial T / \partial y \right|}{\left| \partial T / \partial x \right|} = 1.3 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 52.5^\circ$$

11. Pokažite da je promjena geostrofičkog vjetra visinom u (x, y, z) sustavu

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \frac{g}{fT} \vec{k} \times \nabla_z T + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \vec{v}_g$$

Rješenje:
Izraz za geostrofički vjetar u (x, y, z) sustavu:

$$\vec{v}_g = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_z p \qquad \Big/ \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \vec{k} \times \nabla_z p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho f}\right) + \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_z \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \vec{k} \times \nabla_z p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{RT}{pf}\right) + \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_z (-\rho g)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \rho f \vec{v}_g \frac{R}{f} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T}{p}\right) - \frac{g}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_z \rho$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \rho R \vec{v}_g \left[\frac{p \partial T / \partial z - T \partial p / \partial z}{p^2}\right] - \frac{g}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_z \left(\frac{p}{RT}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \frac{\rho R p}{p^2} \vec{v}_g \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\rho R T}{p^2} \frac{\partial p}{\partial z} \vec{v}_g - \frac{g}{\rho R f} \vec{k} \times \left[T \nabla_z p - p \nabla_z T\right] \frac{1}{T^2}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \vec{v}_g + \frac{\rho g}{p} \vec{v}_g - \frac{gT}{\rho R f} \vec{k} \times \nabla_z p + \frac{gp}{\rho R f T^2} \vec{k} \times \nabla_z T$$

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z}\vec{v}_g + \underbrace{\frac{\rho g}{p}\vec{v}_g - \frac{gT}{\rho R f}\rho f \vec{v}_g}_{=0} + \frac{g}{fT}\vec{k} \times \nabla_z T$$

I time smo pokazali da je promjena geostrofičkog vjetra s visinom jednaka:

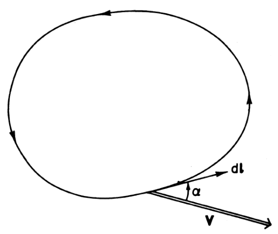
$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z}\vec{v}_g + \frac{g}{fT}\vec{k} \times \nabla_z T$$

5. Cirkulacija

Definicija: Cirkulacija je krivuljni integral tangencijalne komponente brzine oko zatvorene putanje l.

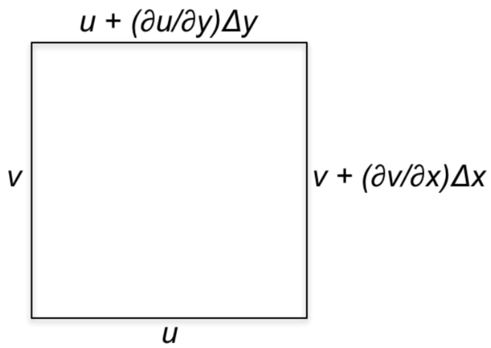
$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint |\vec{v}| \cos \alpha dl$$

Putanja l je materijalna krivulja koja uvijek zatvara istu površinu A.



Slika 5.1: Cirkulacija oko zatvorene krivulje.

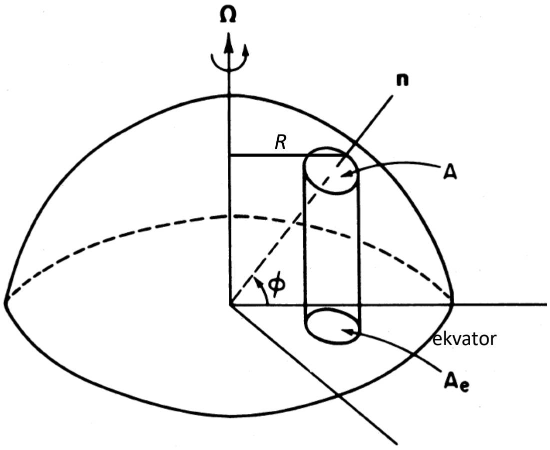
Primjer cirkulacije, tj. integracije oko kvadrata:



$$C \equiv \oint \vec{V} \cdot D\ell = U\Delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x - v\Delta y$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

Prema konvenciji, $C > 0$ na sjevernoj hemisferi za integraciju po krivulji u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu (ciklonalna).
Čest koja miruje ima cirkulaciju zbog rotacije Zemlje.Ukoliko je $C > 0$ cirkulacija je u smjeru kazaljke na satu (anticiklonalna).



$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{R}$$

$\vec{R}$ je udaljenost od osi rotacije Zemlje do ruba fluida.

$$C = \oint \underbrace{(\vec{\Omega} \times \vec{R})}_{||d\vec{l}} \cdot d\vec{l} = \oint \Omega R dl$$

$dl = R d\alpha \quad \Rightarrow$

$$C = \int_0^{2\pi} \Omega R^2 d\alpha = 2\pi\Omega R^2 = 2A\Omega$$

Cirkulaciju možemo smatrati kao ukupnu silu koja gura duž zatvorene krivulje puta (npr. ukupna sila koja gura prema van kad se tijelo giba po kružnici).

- **Diskusija Kelvinovog teorema - Bjerkness**

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = \underbrace{\oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l}}_{I} - 2 \underbrace{\oint (\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}}_{II}}$$

  – Promotrimo promjenu cirkulacije zbog drugog člana:

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} = -\frac{d}{dt}(fA) = -A\frac{df}{dt} - f\frac{dA}{dt}$$

  Prvi član na desnoj strani uključuje promjene Coriolisovog parametra zbog promjene geografske širine. Drugi član na desnoj strani je doprinos zbog promjena površine uslijed konvergencije ili divergencije.

gibanje prema sjeveru	gibanje prema jugu	konvergencija (čest se skuplja)	divergencija (čest se širi)
$d\phi > 0, \quad df/dt > 0$	$d\phi < 0, \quad df/dt < 0$	$dA/dt < 0$	$dA/dt > 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$-A(df/dt) < 0$	$-A(df/dt) > 0$	$-f(dA/dt) > 0$	$-f(dA/dt) < 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} < 0$	$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} > 0$	$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} > 0$	$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} < 0$
razvija se anticiklonalna cirkulacija	ciklonalna cirkulacija	ciklonalna cirkulacija	anticiklonalna cirkulacija
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
Coriolisova sila je veća na sjevernoj strani česti pa se javlja anticiklonalni zakretni moment		npr. hlađenje podloge	npr. zagrijavanje podloge

– Promotrimo sada još promjenu cirkulacije zbog prvog člana:

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_I = \oint \alpha(-\nabla p)\cdot d\vec{l} = \iint_A \nabla\alpha \times (-\nabla p)\cdot d\vec{A}$$

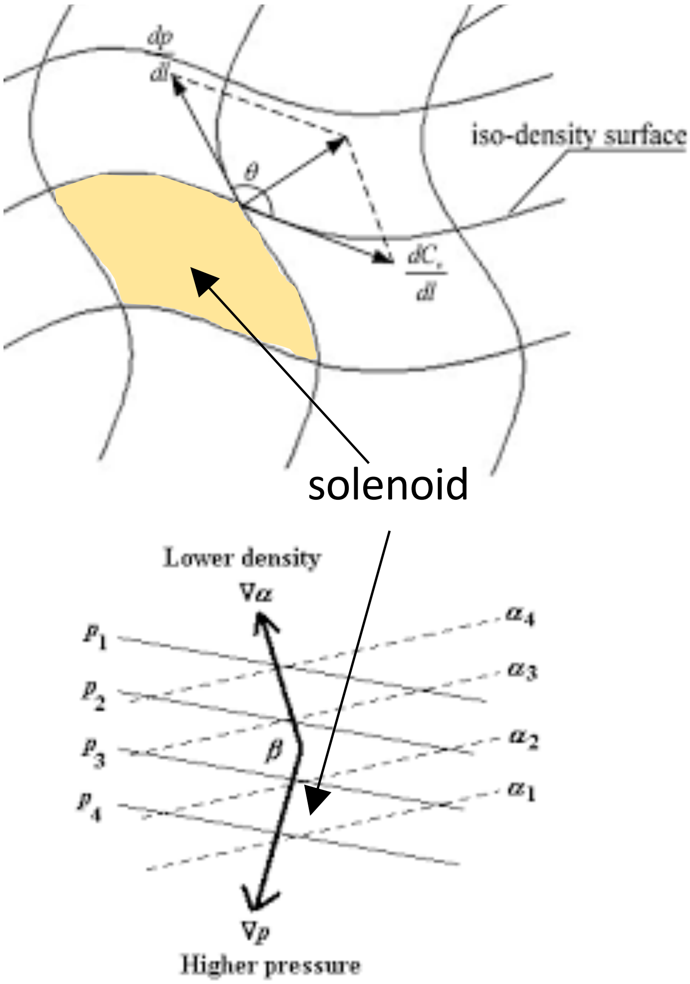
1. Promjena cirkulacije je to jača što je više solenoida (odnosno što je atmosfera baroklinija), tj. što je kut između $(-\nabla p)$ i $\nabla\alpha$ veći, jer je $[\nabla\alpha \times (-\nabla p)] \sim \sin(\nabla\alpha, -\nabla p)$.
2. Promjena cirkulacije je to veća što je veća površina A, jer je veći broj solenoida.
3. ∇p je najveći u vertikalnom smjeru $\Rightarrow$ promjena cirkulacije je veća u vertikalnim ravninama nego u kvazihorizontalnim.

Solenoidi:

$$\vec{S} = \nabla\alpha \times (-\nabla p) = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{S} = \nabla\alpha \times (-\nabla p) = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\vec{j} - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\vec{k}$$

Ako gledamo u (x, y, p) sustavu $\rightarrow$ horizontalne promjene se zbivaju na izobarnoj



Slika 5.2: Izobarne i izosterne plohe čine formacije koje se nazivaju *solenoidi*.

plohi:

$$\nabla_p = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Slijedi da je:

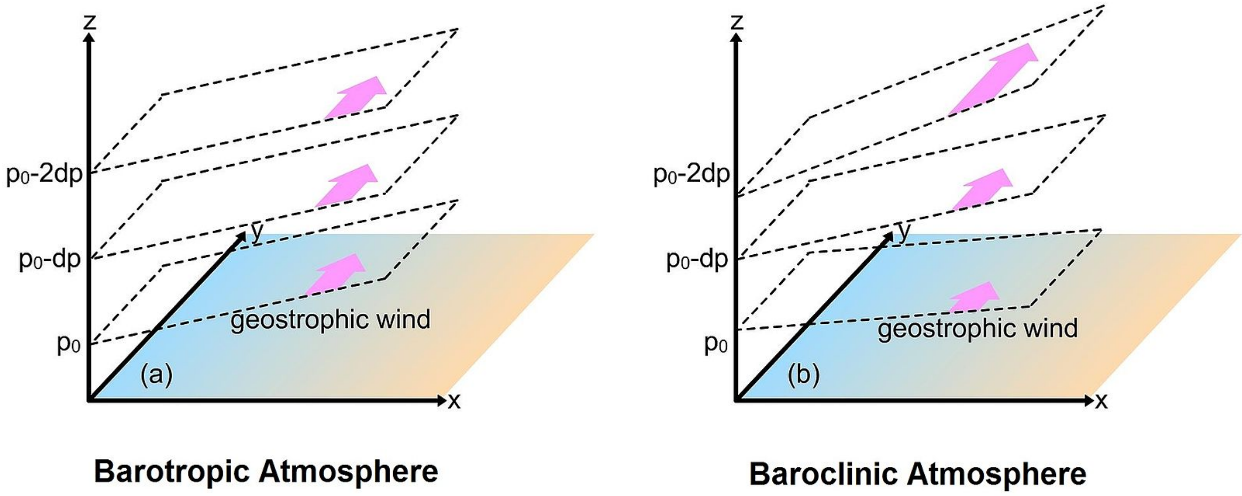
$$\vec{S}_H = -\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial z}\vec{j} = \rho g \Big(\underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial y}\vec{i} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\vec{j}}_{-\vec{k}\times\nabla\alpha} \Big)$$

$$\vec{S}_H = -\rho g \vec{k} \times \nabla \alpha = -\rho g \vec{k} \times \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\rho g \vec{k} \times \frac{\partial}{\partial p} \nabla \Phi$$

$$\vec{S}_H = -\rho g \frac{\partial}{\partial p}\Big[\vec{k} \times \nabla \Phi\Big] = -f \rho g \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial p}$$

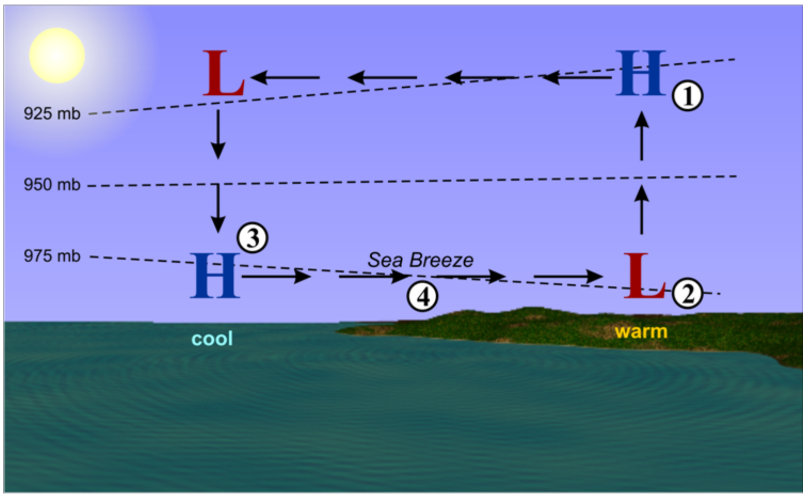
U prošlom poglavlju smo naučili da se vertikalna promjena geostrofičkog vjetra ($\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial p}$) naziva termalni vjetar. Ovo vrijedi u baroklinom fluidu.

U slučaju barotropnog fluida $\left(\frac{dC}{dt}\right)_I = 0$.



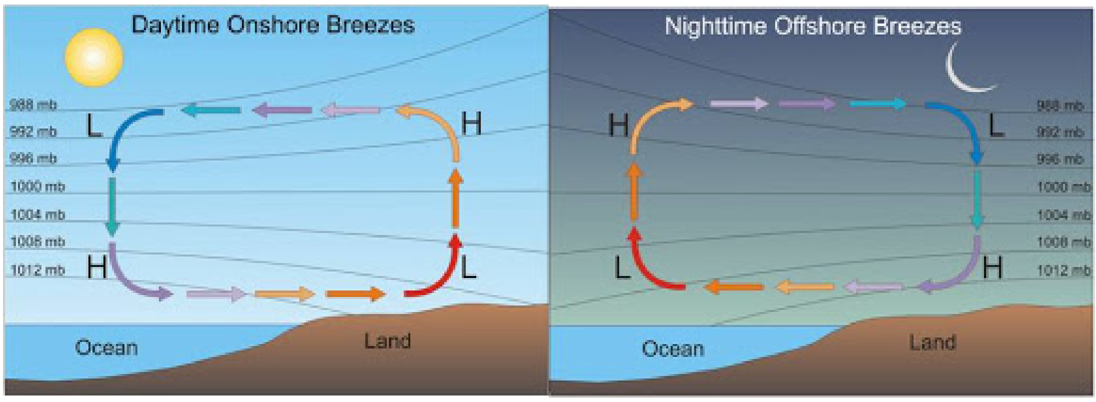
Slika 5.3: Prikaz razlika u geostrofičkom vjetru i izobarnim plohama u barotropnoj i baroklinoj atmosferi.

Proces nastanka cirkulacije zbog postojanja solendoida, odnosno zbog naginjanja izobarnih i izopiknih ploha, se najbolje može islustrirati na primjeru obalne cirkulacije, tj. smorca (eng. *sea breeze*) i kopnenjaka (eng. *land breeze*).



Slika 5.4: Kopno se brže zagrijava nego more te se javlja horizontalna nehomogenost temperature, tj. horizontalni temperaturni gradijent. Zbog zagrijavanja, zrak iznad kopna se diže, zbog čega se visina 925 mb izobarne plohe diže. Na nekoj visini h nad kopnom dolazi do gomilanja zraka, te je tlak na toj visini viši nego tlak na morem na istoji visini. Zbog toga se javlja strujanje, odnosno sila gradijenta tlaka od višeg ka nižem tlaku. Ovo dovodi do slabe divrgencije zbog čega je prizemni tlak nad kopnom niži (L) nego nad morem (H). Stoga je strujanje blizu tla od mora na kopno, a na visini h je s kopna na more. Zrak u prizemnom sloju nad morem se nadomješta spuštanjem zraka s visine, te se na taj način ćelija zatvara.

Zbog gradijenta tlak između mora i kopna u prizemnom sloju dolazi do mezoskalnog strujanja blizu tla od mora na kopno koje se zove smorac. Kad padne noć cirkulacija ide u obrnutom smjeru i imamo vjetar koji se zove kopnenjak.



Slika 5.5: Usporedba dnevne (smorac) i noćne (kopnenjak) obalne cirkulacije.

5.1 Zadaci

1. Čest zraka kružne baze čiji je radijus $r = 100$ km u početku miruje u odnosu na Zemlju tako da se središte baze nalazi na ekvatoru. Nađite srednju tangencijalnu brzinu zraka na udaljenosti r od središta baze čestі ako se ona prenese na Sjeverni pol duž izobarne plohe i to tako da joj se površina ne mijenja.

   Rješenje:

   Bjerknessov cirkulacijski teorem:

$$\frac{dC}{dt} = \underbrace{\oint \alpha(-\nabla p)\cdot d\vec{l}}_{=0 \text{ jer je gibanje duž izobarne plohe}} \qquad -\frac{d}{dt}(fA) = -A\frac{df}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt} = -A\frac{df}{dt} \qquad \int_{t_1,ekvator}^{t_2,pol}$$

$$C_{pol} - C_{ekvator} = -A(f_{pol} - f_{ekvator}), \quad A = r^2\pi, \quad f = 2\Omega\sin\phi$$

$$C = \oint \vec{v}\cdot d\vec{s} \quad \text{a } v_{ekvator} = 0 \rightarrow C_{ekvator} = 0$$

$$C_{pol} = -A\Big[2\Omega(\sin 90^\circ - \sin 0^\circ)\Big] = -r^2\pi 2\Omega$$

$$C = \oint \vec{v}\cdot d\vec{s} = 2\pi r v_{obodna} \quad \Rightarrow$$

$$-2\pi r^2\Omega = 2\pi r v_{obodna}$$

$$v_{obodna} = -\Omega r = -7.29 \text{ m s}^{-1} \quad \text{anticiklonalna cirkulacija}$$

2. Cilindrični stupac zraka radijusa 100 km počinje se gibati po izobarnoj plohi of $\phi_1 = 40°$ N do $\phi_2 = 80°$ N. Izračunajte srednju obodnu brzinu česti kada stupac dođe do ϕ_2.
   Rješenje:

$$\frac{dC}{dt} = \underbrace{\oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l}}_{=0} - \frac{d}{dt}(fA)$$

$$\frac{dC}{dt} = -A\frac{df}{dt} \qquad \Big/ \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$C_2 - C_1 = -A(f_2 - f_1) = -2A\Omega(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)$$

$$C_2 - C_1 = -A(f_2 - f_1) = -2r^2\pi\Omega(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)$$

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi r v_{obodna} = C_2 \quad \Rightarrow$$

$$v_{obodna} = \frac{C_2}{2r\pi} = \frac{-2r^2\pi(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)}{2r\pi} = -r\Omega(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)$$

$$v_{obodna} = -2.49 \text{ m s}^{-1}, \quad C < 0 \text{ anticiklonalna cirkulacija}$$

3. Izračunajte promjenu cirkulacije u jedinici vremena oko kvadrata čija je stranica duljine 1000 km. Temperatura raste prema istoku 1°C/200 km, a tlak prema sjeveru 1 hPa/200 km. Tlak u centru je $p_0 = 1000$ hPa.
   Rješenje:

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l} - \underbrace{\frac{d}{dt}(fA)}_{=0}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \nabla \times (\alpha\nabla p) \cdot d\vec{A} = -\iint_A (\nabla\alpha \times \nabla p) \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \left[\nabla(\frac{RT}{p}) \times \nabla p\right] \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \Big[\underbrace{\frac{R}{p}}_{pretp. p=p_0} \nabla T \times \nabla p\Big] \cdot d\vec{A} - \iint_A \left[RT(-\frac{1}{p^2})\nabla p \times \nabla p\right] \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\iint_A (\nabla T \times \nabla p)\cdot d\vec{A} = -\frac{R}{p_0}\iint_A \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} \times \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot dxdy\vec{k}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\iint_A dxdy = -\frac{R}{p_0}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}A$$

$$\frac{dC}{dt} = -7.2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

4. Cilindrični stupac zraka u početnom trenutku miruje na $\phi = 30°$. Radijus stupca je $r = 100$ km. Kolika će biti srednja obodna brzina česti na rubu stupca ako on ekspandira tako da mu se radijus udvostruči?
   Rješenje:

$$\frac{dC}{dt} = \oint \underbrace{\alpha(-\nabla p)}_{=0}\cdot d\vec{l} - \frac{d}{dt}(fA)$$

$$\frac{dC}{dt} = -2\Omega\frac{d}{dt}(A\sin\phi) = -2\Omega\sin\phi\frac{dA}{dt} \qquad \Big/ \int_{t_1}^{t_2}$$

$$C_2 - C_1 = -2\Omega\sin\phi(A_2 - A_1) = -2\Omega\sin\phi\left[r_2^2 - r_1^2\right]$$

$$C_2 = -2\Omega\sin\phi\left[(2r)^2\pi - r^2\pi\right] = -2\Omega\sin\phi\left[4r^2\pi - r^2\pi\right]$$

$$C_2 = -6r^2\pi\Omega\sin\phi$$

$$C = \oint \vec{v}\cdot d\vec{s} = 2\pi r v_{obodna}$$

$$C_2 = 2r_2\pi v_{obodna} = 4r\pi v_{obodna} \qquad \Rightarrow$$

$$4r\pi v_{obodna} = -6r^2\pi\Omega\sin\phi$$

$$v_{obodna} = -\frac{6r\Omega\sin\phi}{4} = -5.5 \text{ m s}^{-1} \quad \text{anticiklonalna cirkulacija}$$

5. Kružni disk radijusa r rotira kutnom brzinom Ω oko z-osi. Kolika je cirkulacija na rubu diska?
   Rješenje:
   Brzina na rubu diska:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

   Cirkulacija:

$$C = \oint \vec{v}\cdot d\vec{s}$$

   Za promjene vektora pomaka $d\vec{s}$ vrijedi: $d\vec{s} \quad || \quad \vec{v}$

Magnituda brzine na rubu diska je:

$$|\vec{v}| = \Omega r$$

$$C = \oint (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{s} = \oint \Omega r \, ds = 2\pi r \Omega r = 2r^2\pi\Omega$$

Slijedi da je za rotaciju čvrstog tijela:

$$\frac{C}{r^2\pi} = 2\Omega,$$

gdje je $r^2\pi$ površina koju zatvara krivulja koju točka opisuje rotacijom.

6. Koliku će srednju brzinu imati zrak 1 sat nakon uspostavljanja dnevne cirkulacije zbog postojanja izobarno-izosternih solenoida ako je: $p_0 = 1000$ hPa, $p_1 = 900$ hPa, $\overline{T}_2 - \overline{T}_1 = 10$ °C, $L = 20$ km i $h = 1$ km.
   Rješenje:

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l} - \underbrace{\frac{d}{dt}(fA)}_{=0} = -\oint \alpha \, dp$$

$$\frac{dC}{dt} = -\oint \frac{RT}{p} dp = -R \oint T \, d(\ln p)$$

$$\frac{dC}{dt} = -R\left[\overline{T}_2 \ln \frac{p_1}{p_0} + \overline{T}_1 \ln \frac{p_0}{p_1}\right] = R \ln \frac{p_0}{p_1}(\overline{T}_2 - \overline{T}_1) \quad \rightarrow$$

$$dC = R(\overline{T}_2 - \overline{T}_1) \ln \frac{p_0}{p_1} dt \qquad \Big/ \int_0^C, \int_{t_1}^{t_2}$$

$$C = R(\overline{T}_2 - \overline{T}_1) \ln \frac{p_0}{p_1} \Delta t$$

Iz definicje cirkulacije:

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \overline{v}(2h + 2L) = 2\overline{v}(h + L)$$

$$\overline{v} = \frac{C}{2(L+h)} = \frac{R(\overline{T}_2 - \overline{T}_1) \ln \frac{p_0}{p_1} \Delta t}{2(L+h)} = 25.9 \text{ m s}^{-1}$$

Dobivamo velike brzine jer smo zanemarili trenje. U stvarnosti, kako brzina vjetra raste, trenje usporava njegovu stopu ubrzanja, a temperaturna advekcija smanjuje temperaturni kontrast.

7. Kolika je promjena cirkulacije u jedinici vremena oko kvadrata čija dužina stranice iznosi 150 km, ako temperatura raste prema zapadu 1 °C/100 km, a tlak raste prema sjeveru 1 mb/100 km. Tlak u centru kvadrata je 1005 hPa.

Rješenje:

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p)\cdot d\vec{l} - \underbrace{\frac{d}{dt}(fA)}_{=0} =$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A (\nabla\alpha \times \nabla p)\cdot d\vec{A} = -\iint_A \left[\nabla(\frac{RT}{p}) \times \nabla p\right]\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \left[\frac{R}{p}\nabla T \times \nabla p - \frac{RT}{p^2}\nabla p \times \nabla p\right]\cdot d\vec{A}$$

Uz pretpostavku: $p = p_0$:

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\iint_A (\nabla T \times \nabla p)\cdot d\vec{A} = -\frac{R}{p_0}\iint_A \Big(-\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} \times \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}\Big)\cdot dxdy\vec{k}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{R}{p_0}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\iint_A dxdy = -\frac{R}{p_0}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}L^2$$

$$\frac{dC}{dt} = 64.25 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

8. Temperatura raste prema jugozapadu za 1.5 °C po 100 km, a tlak raste prema sjeveru za 1 mb/100 km. Kolika je promjena cirkulacije oko kvadrata čije su stranice na pravcima sjever-jug, odnosno istok-zapad, a duljina im je 1000 km. Tlak u centru je 1000 hPa.

Rješenje:
$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}$
$\nabla T = -\frac{\partial T}{\partial x}\cos 45°\vec{i} - \frac{\partial T}{\partial y}\sin 45°\vec{j}$

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p)\cdot d\vec{l} - \underbrace{\frac{d}{dt}(fA)}_{=0} =$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \nabla \times (\alpha\nabla p)\cdot d\vec{A} = -\iint_A (\nabla\alpha \times \nabla p)\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \frac{R}{p_0}(\nabla T \times \nabla p)\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\iint_A \left[(-\frac{\partial T}{\partial x}\cos 45°\vec{i} - \frac{\partial T}{\partial y}\sin 45°\vec{j}) \times \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}\right]\cdot dxdy\vec{k}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\Big(-\frac{\partial T}{\partial x}\cos 45°\frac{\partial p}{\partial y}\Big)L^2$$

$$\frac{dC}{dt} = 30.4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

6. Vrtložnost

Matematička definicija vrtložnosti kaže da je vrtložnost rotacija vektora brzine:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{U} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\hat{k}$$

6.1 Relativna vrtložnost

U meteorologiji uglavnom gledamo samo vertikalnu komponentu vrtložnosti:

$$\zeta = \vec{k} \cdot \vec{\omega} = \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{6.1}$$

ζ nazivamo **relativna vrtložnost**. Vrtložnost je mjera cirkulacije po jedinici površine (ili drugim riječima, to je spin):

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

te cirkulacija za primjer kvadrata iz poglavlja 5: $\quad C = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \qquad \Rightarrow$

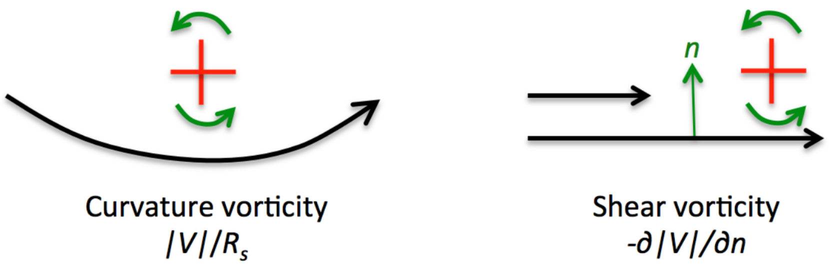
$$C = \zeta \cdot A \qquad \rightarrow \qquad \zeta = \frac{C}{A}$$

Drugim riječima, cirkulacija je *makroskopska* mjera rotacije fluida, a vrtložnost je *mikroskopska* mjera rotacije (u svakoj točki fluida).

U **prirodnom koordinatnom sustavu**, relativna vrtložnost se sastoji od dvije komponente:

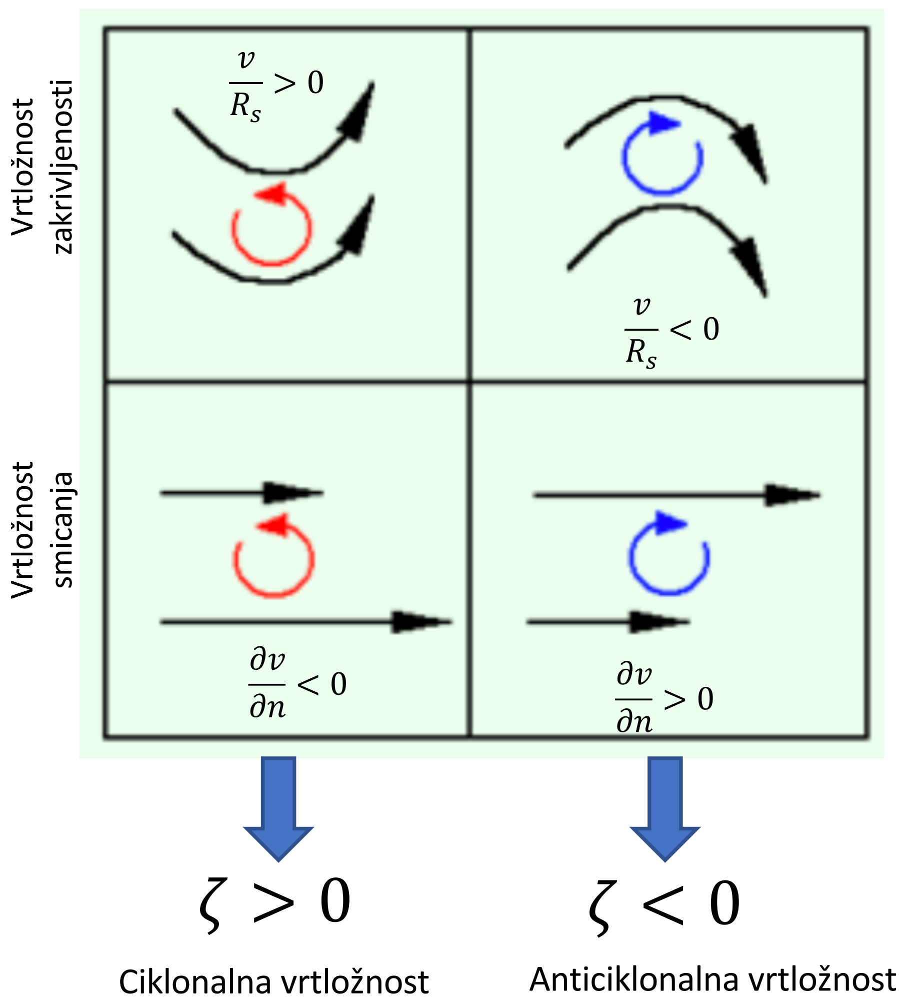
(a) vrtložnost zakrivljenosti=zakretanje vjetra duž strujnice (eng. *curvature vorticity*)

(b) vrtložnost smicanja=promjena brzine vjetra okomito na strujnice (eng. *shear vorticity*)



Slijedi da je izraz za relativnu vrtložnost u PKS-u:

$$\zeta = \frac{v}{R_s} - \frac{\partial v}{\partial n} \tag{6.2}$$



Slika 6.1: Analiza doprinosa vrtložnosti zakrivljenosti i smicanja (označene crvenim i plavim kružnim strelicama) relativnoj vrtložnosti.

Za kombinacije članova na dijagonalama kvadrata na slici predznak relativne vrtložnosti (ciklonalna ili anticiklonalna) ovisi o magnitudama v/R_s i $\partial v/\partial n$.

6.2 Apsolutna vrtložnost

Za razliku od relativne vrtložnosti ($\zeta = \nabla \times \vec{v}$) koja se vidi sa Zemlje, apsolutna vrtložnost se vidi iz inercijalnog sustava. Prema tome, apsolutna vrtložnost je rotacija vektora apsolutne brzine, koja predstavlja zbroj relativne brzine i brzine rotirajuće Zemlje:

$$\vec{\eta} = \nabla \times \vec{v}_a = \nabla \times (\vec{v}_r + \vec{v}_e) \tag{6.3}$$

$$\vec{\eta} = \nabla \times \vec{v}_r + \nabla \times \vec{v}_e \tag{6.4}$$

Vertikalna komponenta aposlutne vrtložnosti:

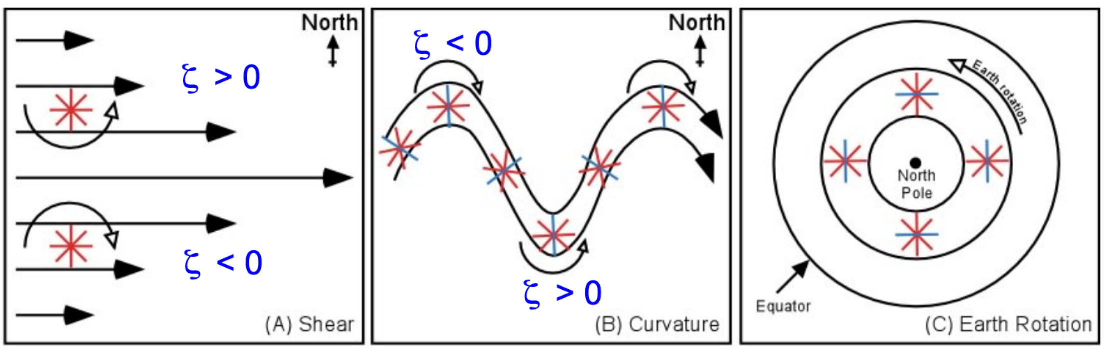
$$\vec{k} \cdot \vec{\eta} = \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{v}_r) + \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{v}_e \tag{6.5}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\eta} = \zeta + f \tag{6.6}$$

Pa slijedi da je apsolutna vrtložnost zbroj relativne vrtložnosti i planetarne vrtložnosti (zbog rotacije Zemlje):

$$\vec{\eta} \cdot \vec{k} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \tag{6.7}$$

Planetarna vrtložnost $\rightarrow$ $f = 2\Omega \sin\phi$ odgovara spinu (vrtloženju) zbog rotacije Zemlje (rotacija oko lokalne vertikale). Njen maksimum je na polovima, dok je na ekvatoru jednaka nuli.



Slika 6.2: Komponente koje čine apsolutnu vrtložnost.

6.3 Jednadžba aposlutne vrtložnosti

Pomoću jednadžbe vrtložnosti se određuje individualna promjena rotacije vektora brzine, što je od posebnog značaja za tumačenje kretanja zraka u ciklonama i anticiklonama, kao i u vrtlozima manjih dimenzija. Jednadžba očuvanja aposlutne vrtložnosti u skalarnom obliku glasi:

$$\frac{d}{dt}(\zeta+f) = \underbrace{-(\zeta+f)\nabla_H\cdot\vec{v}}_{I} - \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{II} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho \partial x}{-}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)}_{III} \tag{6.8}$$

Prema tome, ukupna promjena apsolutne vrtložnosti u vremenu je jednaka sumi: član (I) je član horizontalne advekcije (još se naziva član divergencije), (II) je tilting (twisting) član, a (III) je solenoidalni član.

Analizom magnituda članova na sinoptičkoj skali, nalazimo da su tilting i solenoidalni član puno manji od člana divergencije, pa slijedi da za gibanja sinoptičke skale imamo sljedeću jednadžbu:

$$\frac{d}{dt}(\zeta+f) = -(\zeta+f)\nabla_H\cdot\vec{v} \tag{6.9}$$

Ovo je **kvazigeostrofička jednadžba apsolutne vrtložnosti**. Negdje u sredini troposfer ($\sim$ 500-600 hPa) atmosfera je nedivergentna, tj. $\nabla_H\cdot\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow$ vrijedi geostrofička ravnoteža.

$$\frac{d}{dt}(\zeta+f) = 0 \quad \rightarrow \quad \zeta+f = \text{ const.}$$

Prema tome, u središnjoj troposferi, apsolutna vrtložnost je saųvana, tj. ona je konzervativno svojstvo za barotropni nedivergentni fluid.

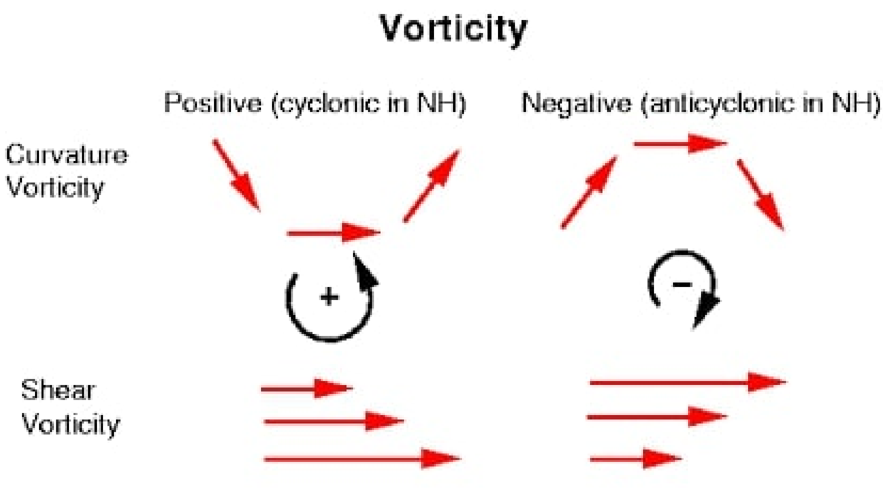
$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta+f) + \vec{v}\cdot\nabla(\zeta+f) = 0 \tag{6.10}$$

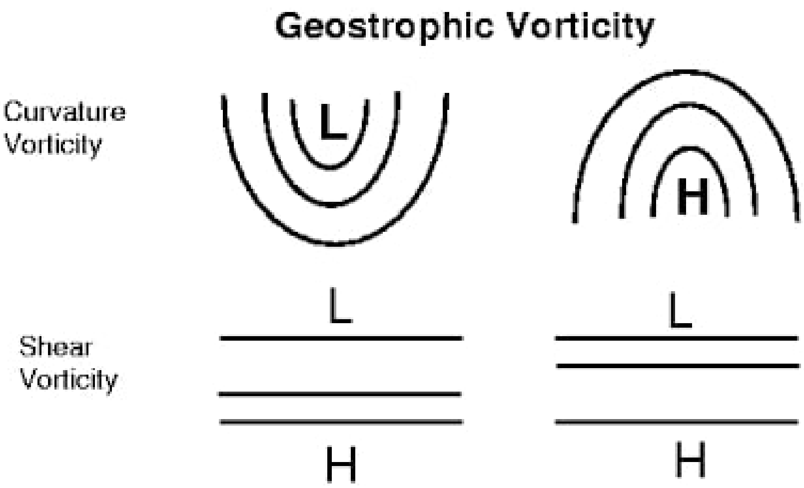
$$\vec{v} = \vec{v}_g = \vec{k}\times\frac{1}{f}\nabla_p\Phi \tag{6.11}$$

Prema tome, možemo naći izraz za geostrofički vrtložnost koristeći izraz za geostrofički vjetar i definiciju relativne vrtložnosti:

$$\zeta_g = \vec{k}\cdot\nabla\times\vec{v}_g = \frac{1}{f_0}\nabla_p^2\Phi, \tag{6.12}$$

pri čemu je f_0 Corisolisov parametar koji je konstantan.





6.4 Potencijalna vrtložnost

Izraz za potencijalnu vrtložnost izvedemo iz kvazigeostrofičke jednadžbe vrtložnosti uz 2 pretpostavke: plitkog fluida (promjene strujanja u vertikalnom smjeru su zanemarive) i da je gustoća konstantna. Slijedi:

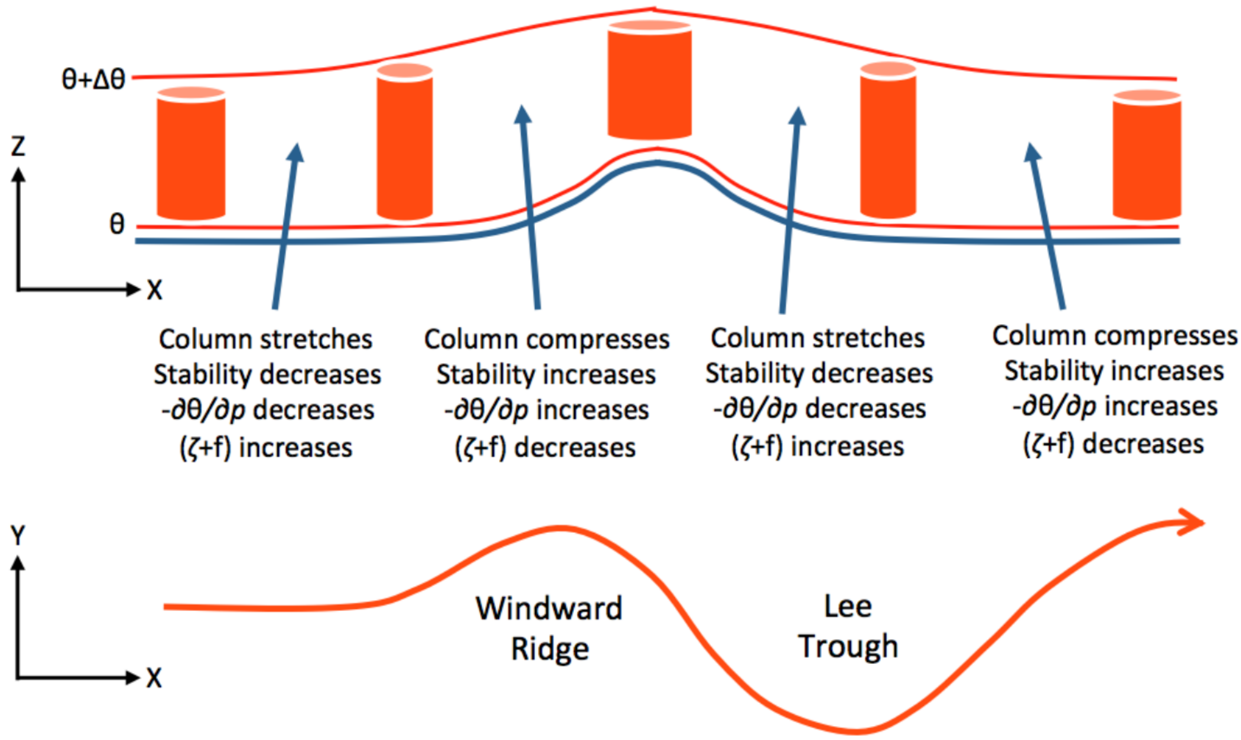
$$\frac{\zeta + f}{H + h} = \text{const.}, \tag{6.13}$$

pri čemu je H gornja granica fluida, h je odstupanje od srednje visine. Slijedi da je potencijalna vrtložnost konzervativno svojstvo u kvazigeostrofičkoj atmosferi.
U izobarnom koordinatnom sustavu potencijalna vrtložnost glasi:

$$\frac{\zeta + f}{p_0} = \text{const.}, \tag{6.14}$$

Potencijalna vrtložnost je korisna za prognozu nastanka ciklona u zavjetrini planina.

$$\frac{\zeta + f}{\Delta z} = \text{cnost.}$$



Slika 6.3: Zonalna struja s početnom relativnom vrtložnošću nailazi na planinsku barijeru.

6.5 Zadaci

1. Koliko se prostorno mora mijenjati geostrofička brzina vjetra po 100 km udaljenosti u smjeru okomitom na tok da bi strujanje bilo irotaciono unatoč anticiklonalnoj zakrivljenosti čiji je radijus 1800 km?

   Rješenje:

   Relativna vrtložnost u PKS:
   $$\zeta = \frac{v}{R_s} - \frac{\partial v}{\partial n}$$
   Anticiklonalni radijus zakrivljenosti: $R_s = -1800$ km.
   Irotaciono strujane: relativna vrtložnost je nula ($\zeta = 0$)
   $$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{v}{R_s} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta n}{R_s} = -\frac{100\text{km}}{1800\text{ km}}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = -5.6 \ \%$$

2. Nađite vrtložnost polja vjetra na zakrivljenoj strujnici čiji je ciklonalni radijus zakrivljenosti 500 km, a brzina vjetra na strujnici i susjednoj strujnici je 11 m s^{-1}.
   Rješenje:
   Relativna vrtložnost u PKS:
$$\zeta = \frac{v}{R_s} - \frac{\partial v}{\partial n}$$
$$\frac{\Delta v}{\Delta n} = 0 \quad \rightarrow \quad \zeta = \frac{v}{R_S} = \frac{11 \text{ m s}^{-1}}{500 \cdot 10^3 \text{ m}} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

3. Odredite vrtložnost polja vjetra na kružnoj strujnici ako je anticiklonalni radijus zakrivljenosti 2000 km. Brzina vjetra na strujnici je 7 m s $^{-1}$. Brzina opada linearno u smjeru centra anticiklone.
   Rješenje:
   Relativna vrtložnost u PKS:
$$\zeta = \frac{v}{R_s} - \frac{\partial v}{\partial n}$$
$$\frac{\partial v}{\partial n} = \text{const} = c \quad \rightarrow \quad \partial v = c\partial n, \quad \partial n = -\partial R_s$$
$$\partial v = -c\partial R_s, \quad \Big/ \int_0^{R_s}$$
$$v(R_s) - v(0) = -cR_S \quad \rightarrow \quad c = -\frac{v(R_s)}{R_s}$$
$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{v}{R_s}$$
$$\Rightarrow \zeta = \frac{v}{R_s} - \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{v}{R_s} + \frac{v}{R_s} = \frac{2v}{R_s} = -7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

4. Nađite vrtložnost polja vjetra ako su strujnice pravci, a brzina se mijenja za 3 m s $^{-1}$ svakih 600 km u smjeru okomitom na strujnice.
   Rješenje:
   $\Delta n = 600$ km
   $\Delta v = 3$ m s^{-1}
   Relativna vrtložnost u PKS:
$$\zeta = \frac{v}{R_s} - \frac{\partial v}{\partial n} \quad \rightarrow R_s = \infty, \frac{v}{R_s} = 0$$
$$\zeta = -\frac{\partial v}{\partial n} \quad \rightarrow \quad \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| = \frac{3 \text{ m s}^{-1}}{600 \cdot 10^3 \text{ m}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

(a) Ako je $\frac{\partial v}{\partial n} > 0 \quad \rightarrow \quad \zeta < 0$ anticiklonalna vrtložnost

(b) Ako je $\frac{\partial v}{\partial n} < 0 \quad \rightarrow \quad \zeta > 0$ ciklonalna vrtložnost

5. Koliki je gradijent brzine vjetra u smjeru okomitom na strujanje u cikloni na strujnici čiji je radijus zakrivljenosti 800 km ako je strujanje irotaciono unatoč cikonalnoj zakrivljenosti, a vjetar iznosi 10 m s^{-1}.

   Rješenje:

   Relativna vrtložnost u PKS:
$$\zeta = \frac{v}{R_s} - \frac{\partial v}{\partial n}$$
   $\zeta = 0$ za irotaciono strujanje
$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{v}{R_s} = \frac{10 \text{ m s}^{-1}}{800 \cdot 10^3 \text{ m}} = 1.25 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} = 1.25 \text{ m s}^{-1}/100 \text{ km}$$

6. Nađite iznos prosječne vrtložnosti u koncentričnom prostoru unutrašnjeg radijusa $r = 200$ km i vanjskog $r = 400$ km u slučaju kad je tangencijalna brzina $v = 10^6/r$ m s^{-1}, gdje je r zadan u metrima. Kolika je prosječna vrtložnost kruga radijusa 200 km?

   Rješenje:

   Prosječna vrložnnost $\overline{\zeta} = \frac{C}{A} \rightarrow$

   Definicija cirkulacije:
$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint v_{tang} r d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{10^6}{r} r d\phi = 2\pi \cdot 10^6 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$$
   Veza između cirkulacije i vrtložnosti:
$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_A \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{A}$$
$$C = \overline{\nabla \times \vec{v}} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} r dr d\phi = \frac{\overline{\zeta}(r_2^2 - r_1^2)2\pi}{2} \qquad \Rightarrow$$
$$\overline{\zeta} = \frac{C}{(r_2^2 - r_1^2)\pi} = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$
   Prosječna vrtložnost za krug radijusa 200 km:
$$C = \overline{\nabla \times \vec{v}} \int_0^{r} \int_0^{2\pi} r dr d\phi = \frac{\overline{\zeta} r^2 2\pi}{2} = r^2 \pi \overline{\zeta} \qquad \Rightarrow$$

$$\overline{\zeta} = \frac{C}{r^2\pi} = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

7. Čest zraka na $\phi = 30°$ N giba se prema sjeveru tako da joj je sačuvanja apsolutna vrtložnost. Ako joj je početna relativna vrtložnost $5 \cdot 10^{-5}$ s^{-1}, kolika je relativna vrtložnost česti kad dođe do 90° N?

   Rješenje:

   $\zeta_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ s^{-1}

   $\phi_1 = 30°$ N, $\phi_2 = 90°$ N

   Apsolutna vrtložnost je sačuvana:

   $$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0$$

   Slijedi da je: $\zeta + f =$const.

   $$\zeta_1 + f_1 = \zeta_2 + f_2 \quad \rightarrow \zeta_2 = \zeta_1 + f_1 - f_2$$

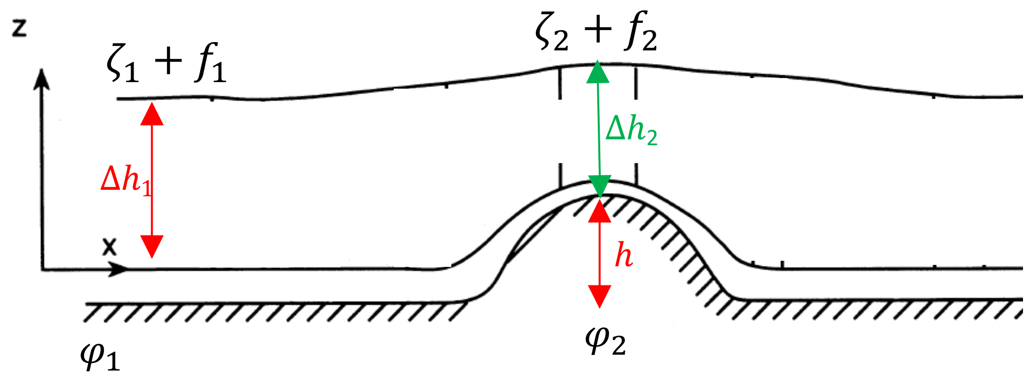
   $$\zeta_2 = \zeta_1 + 2\Omega(\sin\phi_2 - \sin\phi_1) = -2.29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

8. Stupac zraka proteže se do tropopauze koja se nalazi na 11 km visine. Stupac se prvobitno nalazi na $\phi = 15°$ N. Ako se on giba prema planini visine 3 km koja se nalazi na $\phi = 45°$ N, kolika će biti relativna vrtložnost stupca zraka u trenutku prelaska preko vrha planine?

   Rješenje:

   $\phi_1 = 15°$ N, $\phi_2 = 45°$ N

   $h = 3$ km, $\Delta h_1 = 11$ km



   Očuvanje potencijalne vrtložnosti:

   $$\frac{\zeta + f}{\Delta h} = \mathrm{const}$$

$$\frac{\zeta_1 + f_1}{\Delta h_1} = \frac{\zeta_2 + f_2}{\Delta h_2} \qquad \rightarrow \qquad \zeta_2 = \frac{\Delta h_2}{\Delta h_2}(\zeta_1 + f_1) - f_2$$

$$\zeta_1 = 0, \qquad \Delta h_2 = \Delta h_1 - h = 8 \text{ km}$$

$$\zeta_2 = \frac{\Delta h_1 - h}{\Delta h_1} 2\Omega \sin\phi_1 - 2\Omega \sin\phi_2$$

$$\zeta_2 = -7.66 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1} \qquad \text{anticiklonalna vrtložnost}$$

7. Atmosferske oscilacije

Atmosferski valovi su oscilacije u polju varijable, npr. brzine ili tlaka, koje se šire u prostoru. Za proučavanje razvoja valova se koristi **metoda linearnih perturbacija** – jednostavna metoda za kvalitativnu analizu. Ova metoda kaže da se svako polje može rastaviti na osnovno stanje i perturbacije oko osnovnog stanje. Npr. za zonalnu struju vrijedi da je brzina vjetra:

$$u(x,t) = \overline{u} + u'(x,t)$$

gdje je $\overline{u}$ prostorno-vremenski srednjak zonalne struje (usrednjen po x i t).
Postoje dvije osnovne pretpostavke ove metode:

1. varijable osnovnog stanja moraju i same zadovoljavati osnovne jednadžbe

2. perturbacije su male i njihovi umnošci su zanemarivi

Na ovaj način jednadžbe se svode na linearne diferencijalne jednadžbe u kojima su poremećaji varijable, a varijable srednjeg stanja su koeficijenti → jednadžbe s konstantnim koeficijentima imaju sinusoidalni ili eksponencijalni oblik.

Helmholtzov teorem kaže da se svako polje brzine može rastaviti na bezdivergentni dio i irotacioni dio. Fizikalno, rastavljamo brzinu na vrložnu i divergentnu komponentu:

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{v}_{\text{vrtložno}}}_{\text{bezdivergentno } \vec{v}_\psi} + \underbrace{\vec{v}_{\text{divergentno}}}_{\text{irotaciono } \vec{v}_\chi} = \vec{v}_\psi + \vec{v}_\chi, \tag{7.1}$$

gdje je ψ strujna funkcija, tj. potencijal vrtloženja, a χ je potencijal brzine, tj. potencijal divergencije. Prema tome, vektor brzine vjetra je:

$$\vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi \tag{7.2}$$

Rossbyjevi valovi

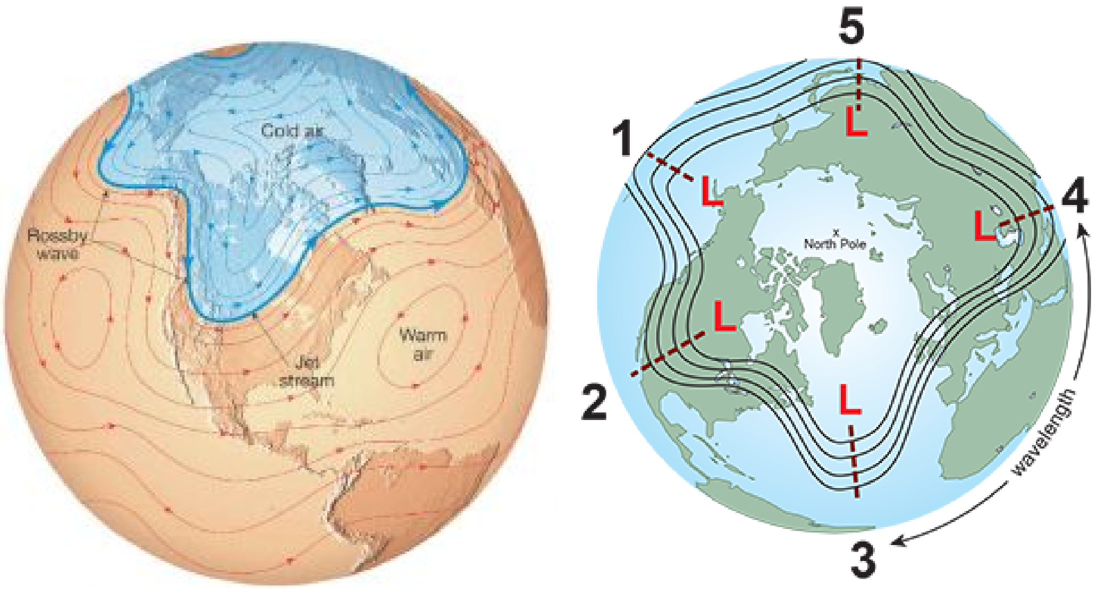
Rossbyjevi valovi su posljedica očuvanja potencijalne vrtložnosti

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta + f}{h}\right) = 0,$$

te se stoga javljaju i u atmosferi i u oceanu. Javljaju se zbog rotacije Zemlje, te su pod utjecajem Coriolisove sile (promjene Coriolisovog efekta s geografskom širinom) i sile gradijenta tlaka.
Brzina gibanja Rossbyjevih valova je definirana faznom brzinom c:

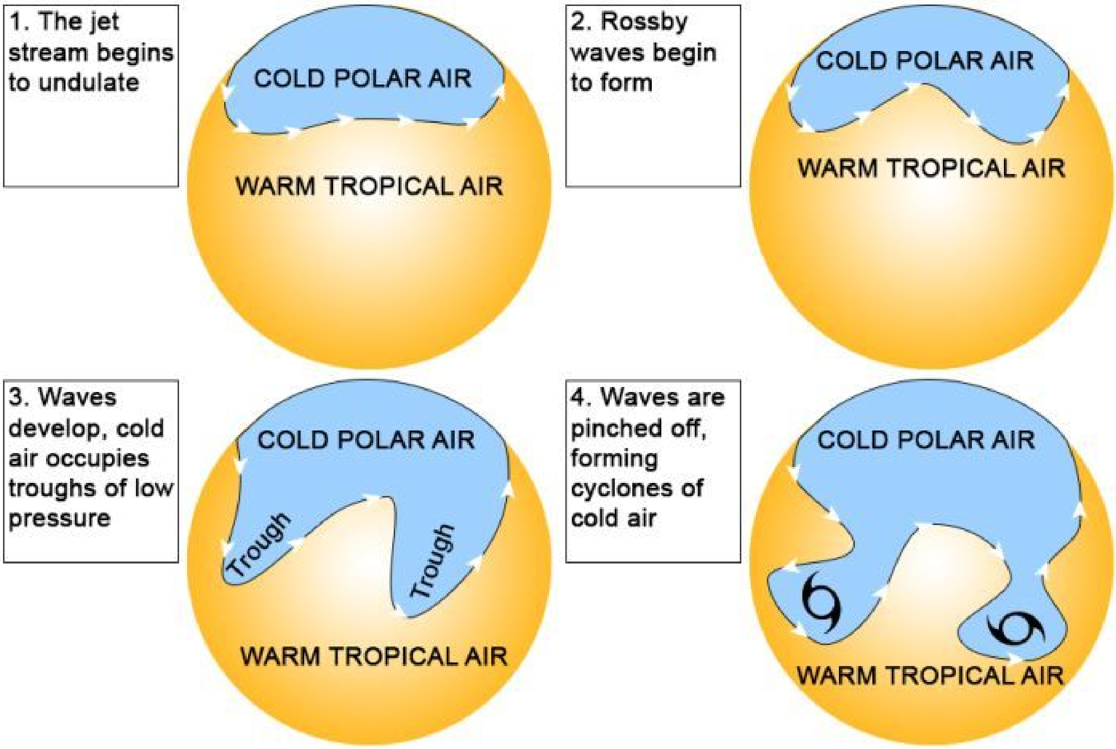
$$c = -\frac{\beta}{k^2 + \frac{f^2}{gh}}, \qquad \beta = \frac{2\Omega \cos\phi}{R}$$

Rossbyjeve valove u atmosferi prepoznajemo kao izražena krivudanja (meandri, obično 4 do 6) mlazne struje na velikoj skali (vidljivi u polju geopotencijala). Ovi valovi su dugi valovi (valne duljine veće od 6000 pa čak do 10 000 km), te se još zovu i planetarni valovi.

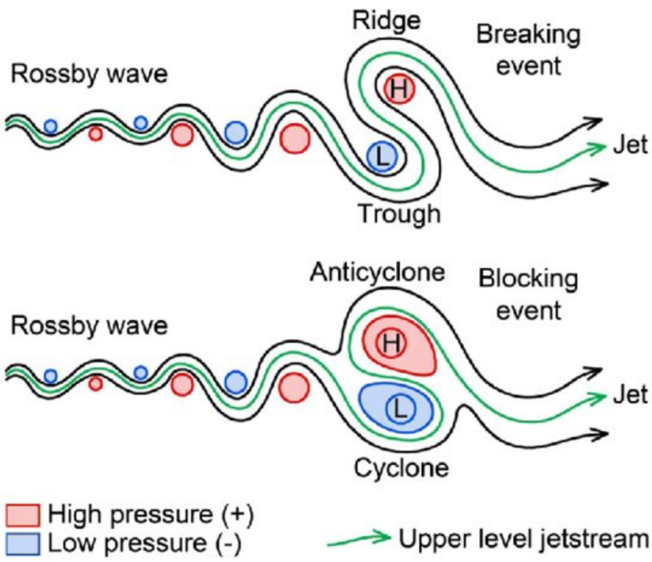


Slika 7.1: Lijevo: Rossbyjevi valovi vidljivi u mlaznoj struji, dijele hladni polarni zrak od toplog suptropskog zraka. Desno: Primjer strukture od 5 planetarnih valova.

Kada su odstupanja od srednjeg stanja toliko velika, masa hladnog (ili toplog) zraka se može odvojiti te može doći do razvoja ciklona (ili anticiklona). Stoga su oni odgovorni za vremenske uvjete na sjevernoj hemisferi. Djelovanje Rossbyjevih valova objašnjava zašto su istočni krajevi kontinenata na sjevernoj hemisferi hladniji od zapadnih dijelova na istoj geografskoj širini.



Slika 7.2: Primjer nastanka izvantropskih ciklona iz Rossbyjevih valova.



Slika 7.3: Primjer kako amplifikacija Rosbbyjevih valova (zbog rasta nestabilnosti) dovodi do različitih vremenskih situacija. Na prvom primjeru ("Breaking event") mlazna struja se zavija oko polja niskog prema visokom tlaku zraka (nastaje greben) i dolazi do pucanja vala. Pucanje vala dovodi do situacije koja se zove atmosfersko blokiranje ("Blocking event", izvor: doi:10.1007/s00015-019-00343-4).

7.1 Zadaci

1. Ako je ψ strujna funkcija, a χ potencijal brzine

$$\vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi$$

pokažite da je vertikalna komponenta vrtložnosti $\zeta = \nabla^2\psi$, a divergencija brzine $D = \nabla^2\chi$.

Rješenje:

Podsjetimo se operatora.

Hamiltonov operator ili nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla U = gradU$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = div\vec{v}$$

Laplaceov operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Definicija relativne vrtložnosti:

$$\zeta = \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{v}$$

Uvrstimo zadanu brzinu:

$$\zeta = \vec{k} \cdot \left[\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi\right)\right] = \vec{k} \cdot \left[\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi\right) + \underbrace{\nabla \times \nabla\chi}_{=0}\right]$$

$$\zeta = \vec{k} \cdot \left[\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi\right)\right]$$

Podsjetimo se diferencijalnih pravila vektorskog množenja:

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi\right) = \vec{k}\underbrace{(\nabla \cdot \nabla\psi)}_{=\nabla^2\psi} - \underbrace{\nabla\psi(\nabla \cdot \vec{k})}_{=0} - (\vec{k} \cdot \nabla)\nabla\psi + \underbrace{(\nabla\psi \cdot \nabla)\vec{k}}_{=0}$$

$$\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi\right) = \vec{k}(\nabla^2\psi) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}\right)}_{=0\ (z=\text{const.})} = \vec{k}(\nabla \cdot \nabla\psi)$$

Slijedi da je relativna vrtložnost (vertikalna komponenta vrtložnosti):

$$\zeta = \vec{k} \cdot \vec{k}(\nabla^2\psi) = \nabla^2\psi$$

Definicija divergencije:

$$D = \nabla \cdot \vec{v}$$

Uvrstimo zadanu brzinu:

$$D = \nabla \cdot \left(\vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi\right) = \nabla \cdot (\vec{k} \times \nabla\psi) + \nabla \cdot (\nabla\chi)$$

$$D = \nabla\psi \cdot (\nabla \times \vec{k}) - \vec{k} \cdot (\nabla \times \nabla\psi) + \nabla^2\chi$$

$$D = \nabla^2\chi$$

2. Pokažite da se kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti za bezdivergentni dio brzine može pomoću strujne funkcije ψ prikazati kao

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0.$$

Pretpostavite da je fluid nestlačiv. Izvedite i geostrofičku jednadžbu vrtložnosti.
Rješenje:
Kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti:

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f)\nabla_H \cdot \vec{v}$$

Pretpostavka da je fluid nestlačiv:

$$\nabla_H \cdot \vec{v} = -\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

Vektor brzine je kao i u prošlom zadatku

$$\vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi + \underbrace{\nabla\chi}_{=0},$$

$\nabla\chi = 0$ jer prema uvjetu zadatka gledamo bezdivergentni dio brzine. U prošlom zadatku smo pokazali da je

$$\zeta = \nabla^2\psi,$$

gdje je ψ strujna funcija. Uvrstimo izraz za ζ u kvazigeostrofičku jednadžbu vrtložnosti:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi + f) + \vec{v}\cdot\nabla(\nabla^2\psi + f) = -(\nabla^2\psi + f)(-\frac{\partial\omega}{\partial p})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{k}\times\nabla\psi)\cdot\nabla(\nabla^2\psi + f) = (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)+\left(-\vec{i}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\vec{j}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\cdot\left[\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi+f)+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi+f)+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\psi+f)\right] = (\nabla^2\psi+f)\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi + f) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0$$

Definicija Jacobiana:

$$J(A,B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$$

Sada jednadžbu vrložnosti možemo napisati:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0$$

Pokazali smo da se kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti za bezdivergentni dio brzine može pomoću strujne funkcije ψ. Sada ćemo izvesti izraz za geostrofičku jednadžbu vrtložnosti.

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0$$

Ponovimo sve korake kao u priješenjem izvodu i dobijemo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) = 0$$

Veza između strujne funkcije i geopotencijala:

$$\vec{v}_g = \vec{k}\times\nabla\psi, \qquad \vec{v}_g = \frac{1}{f_0}\vec{k}\times\nabla\Phi \quad \Rightarrow$$

$$\psi = \frac{\Phi}{f_0} \qquad \rightarrow \quad \nabla^2\psi = \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi) + \frac{1}{f_0}J(\Phi, \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f) = 0 \qquad \Big/ \cdot f_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Phi) + J(\Phi, \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f) = 0$$

3. Gibanje pratimo u Kartezijevom koordinatnom sustavu u kojem je x-os u smjeru azimuta, a y-os je orjentirana prema van okomito na os rotacije. Ako sustav rotira kutnom brzinom Ω, a dubina fluida je linearna funkcija od y: $\overline{H}(y) = H_0 - \gamma y$, pokažite da je:

   (a) perturbirana jednadžba kontinuiteta za nestlačiv fluid

   $$H_0\Big(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\Big) - \gamma v' = 0$$

   (b) a perturbirana kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti

   $$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0,$$

   gdje je $\beta = 2\Omega\gamma/H_0$. Pretpostavite da je polje strujanja geostrofičko osim u članu divergencije.

   (c) Kolika je fazna brzina Rossbyjevih valova ako je valna duljina 100 cm i u x i u y smjeru, $\Omega = 1$ s^{-1}, $H_0 = 20$ cm, $\gamma = 0.05$.

Rješenje:

(a) Jednažba kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) =$$

Za nestlačivi fluid: $\rho =$const. i $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$u = u'(x,t), \quad v = v'(x,t), \quad h = \overline{H} + h'(x,t) = H_0 - \gamma y + h'(x,y,t)$$

$$\nabla(\rho\vec{v}) =$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\partial w'}{\partial z} \qquad \Big/ \int_0^{\overline{H}} \partial z$$

$$\overline{H}\Big(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\Big) = -w(\overline{H}) + w(0)$$

$$\overline{H} = H_0 - \gamma y \approx H_0 \qquad (\gamma y << H_0)$$

$$H_0\Big(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\Big) = -\frac{d\overline{H}}{dt}$$

$$H_0\Big(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\Big)=-\Big(\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}+u'\frac{\overline{H}}{\partial x}+v'\frac{\overline{H}}{\partial y}+w'\frac{\overline{H}}{\partial z}\Big)$$

$$H_0\Big(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\Big)=\gamma v' \qquad \rightarrow \text{perturbirana jedn. kontinuiteta}$$

(b) Za plitki fluid očuvanje potencijalne vrtložnosti u kvazigeostrofičkoj atmosferi:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\zeta+f}{\overline{H}}\Big)=0$$

$$\frac{1}{\overline{H}}\frac{d}{dt}(\zeta+f)-(\zeta+f)\frac{1}{\overline{H}^2}\frac{d\overline{H}}{dt}=0 \qquad \Big/\cdot\overline{H}^2$$

$$\overline{H}\frac{d}{dt}(\zeta+f)-\underbrace{(\zeta+f)}_{=0 \text{ jer je } \zeta<<f}\frac{d\overline{H}}{dt}=0$$

$$\overline{H}(\frac{d\zeta}{dt}+\frac{df}{dt})-f\frac{d\overline{H}}{dt}=0 \qquad (*)$$

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}=\zeta'$$

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\zeta=\frac{\partial \zeta'}{\partial t}+\underbrace{u'\frac{\partial \zeta'}{\partial x}+v'\frac{\partial \zeta'}{\partial y}}_{=0 \text{ produkt perturbacija}}$$

Sada uvrštavamo u jedn. $(*)$ izraz za $\overline{H}$ i ζ':

$$(H_0-\gamma y)\frac{\partial \zeta'}{\partial t}-f\Big(\frac{d(H_0-\gamma y)}{dt}\Big)=0$$

$$\gamma y<<H_0 \qquad \frac{d(H_0-\gamma y)}{dt}=v'\frac{\partial(H_0-\gamma y)}{\partial y}=-v'\gamma$$

Pa slijedi da je:

$$H_0\Big(\frac{\partial \zeta'}{\partial t}\Big)+f\gamma v'=0 \qquad \Big/:H_0$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t}+\frac{f\gamma}{H_0}v'=0 \qquad (**)$$

Relacije za komponente geostrofičkog vjetra:

$$u'=-\frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial y}, \qquad v'=\frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x}$$

Prema tome izraz za perturbacije relativne vrtložnosti:

$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = \frac{g}{f}\nabla^2 h'$$

Uvrštavamo u jedn. (∗∗):

$$\frac{g}{f}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \frac{f\gamma}{H_0}\frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{f}{g}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \frac{f\gamma}{H_0}\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$

$$f = 2\Omega, \qquad \frac{2\Omega\gamma}{H_0} = \beta$$

Slijedi da je perturbirana kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$

(c) Da bismo našli faznu brzinu Rossbyjevih valova, pretpostavimo da je perturbacija h' oblika:

$$h' = h_0 e^{i(kx+my-\omega t)}$$

pri čemu je k valni broj u x smjeru, m valni broj u y smjeru, a ω je frekvencija $\omega = k_c \cdot c$, a $k_c = \sqrt{k^2+m^2}$ za 2-dim slučaj.
Članovi u jedn.

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \qquad (***)$$

su sljedeći:

$$\frac{\partial h'}{\partial x} = ikh', \quad \frac{\partial h'}{\partial y} = imh', \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = -k^2 h', \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = -m^2 h'$$

$$\nabla^2 h' = -h'(k^2+m^2) \quad \to \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' = -(k^2+m^2)(-i\omega)h' = i\omega(k^2+m^2)h'$$

Uvrštavamo u jedn. (∗ ∗ ∗):

$$i\omega(k^2+m^2)h' + \beta i k h' = 0$$

$$\omega(k^2+m^2) + \beta k = 0$$

$$k_c c(k^2+m^2) + \beta k = 0$$

$$(\sqrt{k^2+m^2})c(k^2+m^2) + \beta k = 0 \quad \Rightarrow c = -\frac{\beta k}{(k^2+m^2)^{3/2}}$$

Za naš slučaj: $\lambda_x = \lambda_y = 1$ m, $k = m = 2\pi/\lambda = 2\pi$ m^{-1}

$$c = -\frac{\beta k}{(2k^2)^{3/2}} = -\frac{\beta}{2^{3/2}k^2} = -\frac{2\Omega\gamma}{H_0}\frac{1}{2^{3/2}k^2}$$

$$c = -0.45 \text{ cm s}^{-1}$$

4. Nađite faznu brzinu Rossbyjevih valova za homogeni nestlačivi ocean dubine h. Pretpostavite da ocean miruje i da su perturbacije funkcije od x i t:

$$u = u'(x,t) \quad v = v'(x,t) \quad h = \overline{H} + h'(x,t),$$

gdje je H srednja dubina oceana. Pokažite da je perturbirana jednadžba vrtložnosti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f^2}{gH}\Big)h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0.$$

Zadano je: $\overline{H} = 4$ km, $L = 10000$ km, $\phi = 45°$ N.

Rješenje:

Za plitki fluid vrijedi očuvanje potencijalne vrtložnosti:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\zeta + f}{h}\Big) = 0$$

$$\frac{1}{h}\frac{d}{dt}(\zeta + f) - \frac{\zeta + f}{h^2}\frac{dh}{dt} = 0 \qquad \Big/ \cdot h^2$$

$$h\frac{d}{dt}(\zeta + f) - (\zeta + f)\frac{dh}{dt} = 0$$

$$h\Big(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{df}{dt}\Big) - (\zeta + f)\frac{dh}{dt} = 0 \qquad (*)$$

Promjena Coriolisovog parametra u vremenu:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = \beta v = \beta v' \text{ jer je } v = v'$$

Kao i u prethodnom zadatku, za vrtložnost vrijedi:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \zeta'$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\zeta' = \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \underbrace{u'\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v'\frac{\partial \zeta'}{\partial y}}_{=0 \text{ produkt perturbacija}} = \frac{\partial \zeta'}{\partial t}$$

Promjena dubine oceana u vremenu:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + w\frac{\partial h}{\partial z}, \qquad h = \overline{H} + h'(x,t)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h'}{\partial t} + u'\frac{\partial h'}{\partial x} = \frac{\partial h'}{\partial t}$$

Uvrštavamo u jedn. $(*)$:

$$(\overline{H} + h')\Big(\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \beta v'\Big) - (\zeta' + f)\frac{\partial h'}{\partial t} = 0$$

Produkte perturbacija zanemarujemo pa slijedi:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \beta v' - \frac{f}{\overline{H}}\frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \qquad (**)$$

Ako pretpostavimo da vrijedi geostrofička aproksimacija, imamo:

$$u' = -\frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial y}, \qquad v' = \frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x}$$

$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = \frac{g}{f}\nabla^2 h'$$

Uvrštavamo u jedn. $(**)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{g}{f}\nabla^2 h' + \frac{\beta g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{f}{\overline{H}}\frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{f}{g}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\nabla^2 - \frac{f^2}{g\overline{H}}\Big]h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \qquad (***)$$

Pretpostavimo da su odstupanja srednje dubine mora h' valnog oblika:

$$h' = Ae^{ik(x-ct)}$$

Pa imamo:

$$\frac{\partial h'}{\partial x} = ikh', \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = -k^2 h', \qquad \frac{\partial h'}{\partial t} = -ikch'$$

$$\nabla^2 h' = -k^2 h' \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' = ick^3 h'$$

Uvrstimo u jedn. $(***)$:

$$ick^3 h' + \frac{f^2}{g\overline{H}}ickh' + \beta ikh' = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{i}{kh'}$$

Odredimo izraz za faznu brzinu:

$$c\left(k^2 + \frac{f^2}{g\overline{H}}\right) + \beta = 0 \quad \rightarrow c = -\frac{\beta}{k^2 + f^2/(g\overline{H})}$$

Promjena Coriolisovog parametra s geografskom širinom:

$$\beta = \frac{df}{dy} = \frac{d(2\Omega \sin\phi)}{Rd\Phi} = \frac{2\Omega\cos\phi}{R},$$

gdje je $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$ s^{-1}, a $R = 6371$ km.

Slijedi da je fazna brzina Rossbyjevih valova u ovom slučaju:

$$c = -\frac{2\Omega\cos\phi}{R\left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + \frac{(2\Omega\sin\phi)^2}{g\overline{H}}\right]} = -24.3\text{m s}^{-1}$$

5. Nađite faznu i grupnu brzinu Rossbyjevih valova za geostrofičku atmosferu čija je brzina 20° geografske duljine u 24 h, a valna duljina valova je 60° geografske duljine. Valovi se nalaze na $\phi = 45°$ N.

Rješenje:

U slučaju geostrofičke atmosfere imamo sljedeće:

$$u = \overline{u} + u'(x,t)$$

$$v = v'(x,t)$$

$$\Phi = \overline{\Phi} + \Phi'(x,t)$$

Brzina osnovnog vjetra:

$$\overline{u} = -\frac{1}{f}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y}, \quad \text{uz} \quad \frac{\partial\overline{u}}{\partial y} = 0,$$

tj. zonalna struja se ne mijenja u y smjeru (s geografiskom širinom). Perturbacije polja brzine:

$$u' = -\frac{1}{f}\frac{\partial\Phi'}{\partial y}, \qquad v' = \frac{1}{f}\frac{\partial\Phi'}{\partial x}$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} = \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{1}{f}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x^2} = \zeta'$$

Jednadžba apsolutne vrtložnosti za geostrofičku atmosferu:

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\zeta}{dt} + \frac{df}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + (\overline{u}+u')\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v'\frac{\partial \zeta'}{\partial y} + (w'\frac{\partial \zeta'}{\partial z} + u'\frac{\partial f}{\partial x} + v'\frac{\partial f}{\partial y} + w'\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \beta v' = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}\right) + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}\right) + \beta\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \qquad \Big/ \cdot f$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}\right) + \beta\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \qquad (*)$$

Pretpostavimo da su perturbacije geopotencijala valnog oblika i da se gibaju u x smjeru:

$$\Phi' = \Phi_0 e^{ik(x-ct)}$$

Pa imamo:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = ik\Phi', \qquad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} = -k^2\Phi', \qquad \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -ikc\Phi'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} = ick^3\Phi', \qquad \frac{\partial^3 \Phi'}{\partial x^3} = -ik^3\Phi'$$

Uvrstimo derivacije u jedn. $(*)$:

$$ik^3c\Phi' + \overline{u}(-ik^3)\Phi' + \beta ik\Phi' = 0 \qquad \Big/ \frac{i}{k\Phi'}$$

$$k^2(c-\overline{u}) + \beta = 0 \qquad \rightarrow \qquad c = \overline{u} - \frac{\beta}{k^2} \qquad \text{fazna brzina}$$

Grupna brzina:

$$c_g = \frac{\partial \nu}{\partial k} = \frac{\partial (kc)}{\partial k} = \frac{\partial (k\overline{u} - \beta/k)}{\partial k} quad \Rightarrow$$

$$c_g = \overline{u} + \frac{\beta}{k^2}$$

Uvjeti zadatka su:

$$\overline{u} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{R\Delta\alpha}{\delta t} = \frac{20^\circ}{24\text{ h}} = \frac{20 \cdot 6371 \cdot 10^3\text{ m} \cdot \cos 45^\circ}{24 \cdot 3600\text{ s}}\frac{\pi}{180}$$

$$\frac{\beta}{k^2} = \frac{1}{k^2}\frac{df}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2}\frac{2\Omega\sin\phi}{R} = \frac{L^2\Omega\cos\phi}{2\pi^2 R}$$

Valna duljina valova je: $L = 60^\circ = 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}R\cos\phi = \frac{\pi}{3}R\cos\phi$.
Slijedi da je $\beta/k^2 = 9.12\text{ m s}^{-1}$.

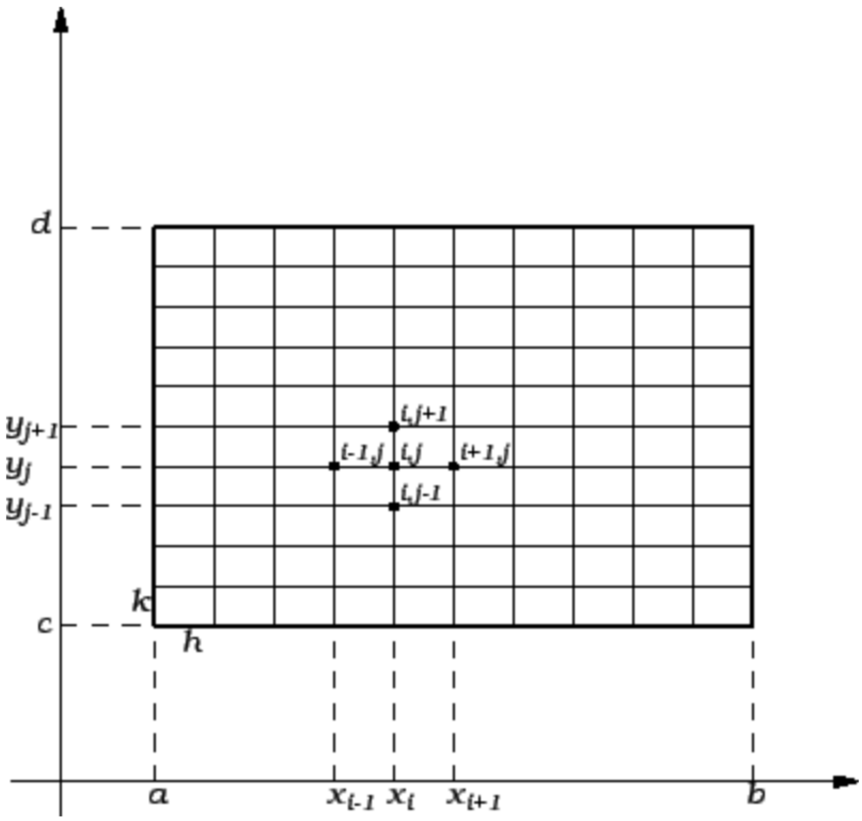
Sada izračunamo iznos grupne i fazne brzine Rossbyjevih valova:

$$c = 9.08 \text{ m s}^{-1} = 9.97°/24 \text{ h}$$

$$c_g = 27.32 \text{ m s}^{-1} = 30.02°/24 \text{ h}$$

8. Dodatak: Metoda konačnih razlika

Numeričko rješavanje jednadžbi gibanja u dinamičkoj meteorologiji se danas u velikoj većini slučajeva radi tako da se izabere neki skup točaka u prostoru za koje se računaju vrijednosti zavisno promjenjivih varijabli.
Promatramo približne vrijednosti funkcije $u(x)$ u diskretnim točkama $x = i\Delta x$, tj. imamo $u_i = u_i(i\Delta x)$, gdje je Δx udaljenost između dvije točke mreže. Da bismo konstruirali približne jednadžbe, koristimo konačne razlike (eng. *finite differences*) približnih vrijednosti u_i.



Slika 8.1: Zavisno-promjenjive varijable x i y u točki (i, j) imaju vrijednosti x_i i y_i.

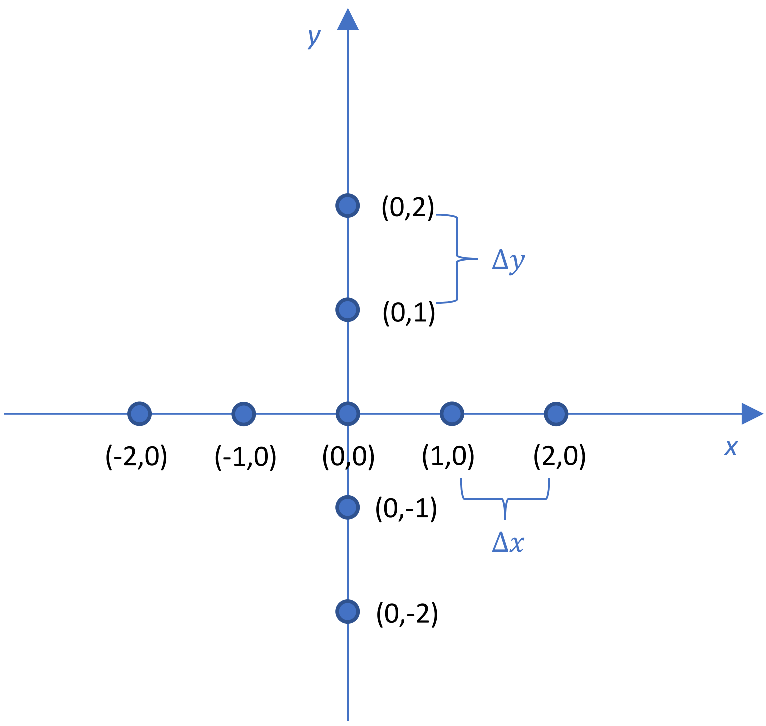
Rubne i rubno-početne probleme, u kojima se pojavljuju parcijalne diferencijalne jednadžbe, možemo također rješavati metodom konačnih razlika, ili kako se u ovom slučaju često kaže metodom mreže. Osnovna ideja je zamijeniti derivacije (u ovom slučaju parcijalne) s konačnim diferencijama, i time svesti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu na sustav algebarskih jednadžbi.

Metoda konačnih razlika je numerička metoda koja pomoću jednadžbi konačnih razlika aproksimira derivacije elemenata unutar diferencijalnih jednadžbi. Metoda se zasniva na aproksimaciji formule za derivaciju funkcije:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

8.1 Primjeri:

1. Na primjeru 2-dim polja temperature ($T(x, y)$) prikazat ćemo kako se koriste konačne (centralne) razlike da bismo odredili prvu i drugu derivaciju temperature u x i y smjeru. Određujemo derivacije u točki (0,0):



Prva derivacija T po x i y u točki $(0, 0)$:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{0,0} = \frac{T(1,0) - T(-1,0)}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{dT}{dy}\right)_{0,0} = \frac{T(0,1) - T(0,-1)}{2\Delta y}$$

Druga derivacija:

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_{0,0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)_{0,0} = \frac{\left(\frac{dT}{dx}\right)_{1,0} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_{-1,0}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_{0,0} = \frac{\frac{T(2,0)-T(0,0)}{2\Delta x} - \frac{T(0,0)-T(-2,0)}{2\Delta x}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_{0,0} = \frac{T(2,0) - 2T(0,0) + T(-2,0)}{4\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{d^2T}{dy^2}\right)_{0,0} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dT}{dy}\right)_{0,0} = \frac{\left(\frac{dT}{dy}\right)_{0,1} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_{0,-1}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{d^2T}{dy^2}\right)_{0,0} = \frac{\frac{T(0,2)-T(0,0)}{2\Delta y} - \frac{T(0,0)-T(-0,-2)}{2\Delta y}}{2\Delta y}$$

$$\left(\frac{d^2T}{dy^2}\right)_{0,0} = \frac{T(0,2) - 2T(0,0) + T(0,-2)}{4\Delta y^2}$$

$$\left(\frac{d^2T}{dxdy}\right)_{0,0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dy}\right)_{0,0} = \frac{\left(\frac{dT}{dy}\right)_{1,0} - \left(\frac{dT}{dy}\right)_{-1,0}}{2\Delta x}$$

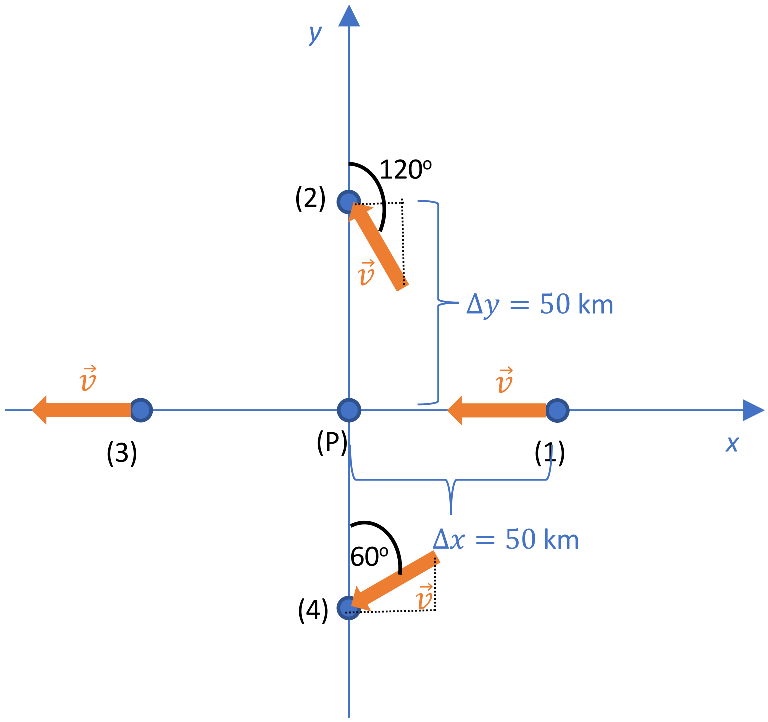
$$\left(\frac{d^2T}{dxdy}\right)_{0,0} = \frac{\frac{T(1,1)-T(1,-1)}{2\Delta y} - \frac{T(-1,1)-T(-1,-1)}{2\Delta y}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{d^2T}{dxdy}\right)_{0,0} = \frac{T(1,1) - T(1,-1) + T(-1,1) + T(-1,-1)}{4\Delta x\Delta y}$$

2. U tablici su dani sljedeći podaci iznosa brzine vjetra oko postaje (P).

   Ako je udaljenost između postaje i mjernih točki 50 km, izračunajte približno divergenciju i vrtložnost.

	v (m s^{-1})	α (°)
točka (1)	10	90
točka (2)	4	120
točka (3)	8	90
točka (4)	4	60



Rješenje:

Divergencija:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Vrtložnost:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$u_1 = -10 \text{ m s}^{-1}$, $\quad v_1 = 0 \text{ m s}^{-1}$

$u_2 = -4\cos 30° = -2\sqrt{3} \text{ m s}^{-1}$, $\quad v_2 = 4\sin 30° = 2 \text{ m s}^{-1}$

$u_3 = -8 \text{ m s}^{-1}$, $\quad v_3 = 0 \text{ m s}^{-1}$

$u_4 = -4\cos 30° = -2\sqrt{3} \text{ m s}^{-1}$, $\quad v_4 = -4\sin 30° = -2 \text{ m s}^{-1}$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{u_1 - u_3}{2\Delta x} + \frac{v_2 - v_4}{2\Delta y} = \frac{-10 + 8}{100 \cdot 10^3}\mathrm{s}^{-1} + \frac{2 - (-2)}{100 \cdot 10^3}\mathrm{s}^{-1}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\zeta = \frac{v_1 - v_3}{2\Delta x} - \frac{u_2 - u_4}{2\Delta y} = \frac{0 - 0}{100 \cdot 10^3}\mathrm{s}^{-1} - \frac{-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{100 \cdot 10^3}\mathrm{s}^{-1} = 0\ \mathrm{s}^{-1}$$