Na prvoj stranici nalazi se obavezan dio prve zadaće koji je potrebno predati ili u papirnatom obliku do posljednjih vježbi prije nadolazećih praznika, ili u elektroničkom obliku (može skenirano/slikano, ali molim da bude jasno vidljivo) do 23. prosinca. Na idućim stranicama nalazi se neobevazan materijal koji je zamišljen kao kratka nadopuna na neke tehnike računanja korištene na predavanjima i vježbama.

1 Prva zadaća

1. (3) Riješite početnu zadaću:

$$\begin{cases} 2u_{xx} + 3u_{tt} - 7u_{xt} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g(x), \\ u_t(x,0) = h(x). \end{cases}$$

   Uputa: koristite zamjenu varijabli oblika

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + t, \\ \eta = x + \beta t \end{cases}$$

   da svedete gornju PDJ na oblik $u_{\xi\eta} = 0$ i zatim ga riješite. Prigodne konstante α i β odredite sami.

2. (2) Pokažite da za zadaću

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1, \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

   postoji C^1 rješenje na nekoj okolini x-osi.

3. (5) Neka je u C^1 rješenje jednadžbe $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = -u$ u zatvorenom jediničnom krugu te neka je $a(x,y)x + b(x,y)y > 0$ na jediničnoj kružnici. Dokažite da je tada $u \equiv 0$.
   Napomena: Pokažite da je $0 \leq \min u \leq \max u \leq 0$.

2 Polarne koordinate

Označimo s

$$S^{d-1}(r) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = r^2\}$$

$d-1$-dimenzionalnu sferu radijusa r u $\mathbb{R}^d$. Neka je $x \in S^{d-1} := S^{d-1}(1)$. Posebno je $|x_d| \leq 1$, pa postoji $\vartheta_{d-1} \in [0, \pi]$ takav da je $x_d = \cos\vartheta_{d-1}$. Tada vrijedi $\sum_{i=1}^{d-1} x_i^2 = 1 - x_d^2 = \sin^2\vartheta_{d-1}$, pa zaključujemo da se $(x_1, \dots, x_{d-1})$ nalazi na $d-2$-dimenzionalnoj sferi radijusa $\sin\vartheta_{d-1}$, tj. $(x_1, \dots, x_{d-1}) \in S^{d-2}(\sin\vartheta_{d-1})$. Induktivno dobivamo iduću parametrizaciju sfere

$$(x_1, \dots, x_d) = \Phi_{d-1}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}),$$

gdje je $\Phi_{d-1} : [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]^{d-2} \to \mathbb{R}^d$ definirana (prvo rekurzivno kao u ranije opisanom postupku) s

$$\Phi_1(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{d-1}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) = \begin{bmatrix} \sin\vartheta_{d-1}\Phi_{d-2}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-2}) \\ \cos\vartheta_{d-1} \end{bmatrix}, \quad \text{za } d \geq 3.$$

odnosno raspisano

$$\Phi_{d-1}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) = \begin{bmatrix} \sin\vartheta_{d-1}\sin\vartheta_{d-2}\cdots\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_{d-1}\sin\vartheta_{d-2}\cdots\sin\vartheta_2\sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_{d-1}\sin\vartheta_{d-2}\cdots\cos\vartheta_2 \\ \vdots \\ \sin\vartheta_{d-1}\cos\vartheta_{d-2} \\ \cos\vartheta_{d-1} \end{bmatrix}.$$

Parametrizacija sfere radijusa r, $S^{d-1}(r)$, se sada jednostavno dobije kao

$$(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) \mapsto r\Phi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}).$$

Svaki $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ možemo na jedinstven način zapisati kao produkt pozitivnog broja (modul) te elementa na sferi (smjer) u **polarnim koordinatama**

$$x = r \cdot x', \quad r = |x| > 0,\ x' = \frac{x}{|x|} \in S^{d-1}.$$

Na taj način dobivamo parametrizaciju od $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ kao

$$(x_1, \dots, x_d) = \Psi_d(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}),$$

gdje je $\Psi_d : \langle 0, \infty\rangle \times [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]^{d-2}$ dana s

$$\Psi_d(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}) = r \cdot \Phi_{d-1}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1}).$$

Napomena 1. Navedene parametrizacije se mogu promatrati restringirati na otvoreni skup $\langle 0, \infty\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle^{d-2}$; slika Ψ po ovom skupu se od prethodnog razlikuje do na skup mjere nula (uvjerite se), što ne čini nikakvu razliku pri integriranju (neki rezultati s INTRAF-a su napravljeni za otvorene skupove, dok neki za kvadre).

3 Integriranje u polarnim koordinatama

Zadatak 1. *(Jacobijan zamjene varijabli)*

(a) Pokažite da je

$$\det \nabla \Psi_d(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{d-1}) = r \sin^{d-2} \vartheta_{d-1} \det \nabla \Psi_{d-1}(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{d-2}).$$

(b) Pokažte da je $\det \nabla \Psi_d = r^{d-1} \prod_{k=2}^{d-1} \sin^{k-1} \vartheta_k$.

Napomena 2. Za idući zadatak nije potrebna eksplicitna formula za Jacobijane dobivena u prethodnom zadatku; ovdje je prije svega navedena radi potpunosti te kako bi se mogli računati integrali funkcija u polarnim koordinatama koje nisu nužno radijalne (Zadatak 4.). Treba napomenuti da je već računanje same volumena (tj. integrala jedinice) kugle netrivijalno zbog pojave potencija trigonometrijskih funkcija u integralu, već se najčešće koristi trik s gamma funkcijom (možda napravljeno na INTRAF-u).

Zadatak 2. Označimo $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{d-1}) \in [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]^{d-2}$. Iz definicije imamo (u blok-matričnom zapisu)

$$\nabla \Psi_d(r, \vartheta) = \begin{bmatrix} \Phi_{d-1}(\vartheta) & r \nabla \Phi_{d-1}(\vartheta) \end{bmatrix},$$

odnosno

$$(\nabla \Psi_d(r, \vartheta))^T = \begin{bmatrix} (\Phi_{d-1}(\vartheta))^T \\ r(\nabla \Phi_{d-1}(\vartheta))^T \end{bmatrix}$$

(a) Dokažite da vrijedi (u blok-matričnom zapisu):

$$(\nabla \Psi_d(r, \vartheta))^T \nabla \Psi_d(r, \vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 (\nabla \Phi_{d-1}(\vartheta))^T \nabla \Phi_{d-1}(\vartheta). \end{bmatrix}$$

(b) Dokažite da vrijedi

$$|\det \Psi_d(r, \vartheta)| = \sqrt{\det(\nabla(r\Phi_{d-1})(\vartheta))^T \nabla(r\Phi_{d-1})(\vartheta)}.$$

Koristeći prethodni odnos Jacobijana u polarnoj zamjeni varijabli te Jacobijana parametrizacije sfere, možemo pokazati:

Zadatak 3. Neka je $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tada je

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_0^\infty \Big(\int_{rS^{d-1}} f \Big) dr.$$

Poseban slučaj koji će se nama često javljati u kolegiju je onaj u kojem je f radijalna funkcija, tj. ovisi samo o modulu, a ne i o smjeru.

Zadatak 4. Neka je $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ radijalna funkcija, tj. pretpostavimo da postoji $g : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ td. je $f(x) = g(|x|)$. Tada je

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = |S^{d-1}| \int_0^\infty g(r) r^{d-1} dr.$$

4 Zamjena varijabli pri integriranju po sferi

Neka je sada $d \geq 2$ fiksan. Označimo s $S(x,r)$ sferu radijusa r oko $x \in \mathbb{R}^d$. Stavimo $\Omega = [0, 2\pi\rangle \times [0,\pi]^{d-2}$, te neka je kao ranije $\Phi := \Phi_{d-1} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ parametrizacija jedinične sfere.

Zadatak 5. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^d)$ dan s $Ay = x + ry$, pri čemu su $x \in \mathbb{R}^d$ i $r > 0$ zadani.

(a) Parametrizacija sfere $S(x,r)$ je tada dana s $\Phi_A := A \circ \Phi$.

(b) Vrijedi
$$(\nabla \Phi_A)^T \nabla \Phi_A = r^2 (\nabla \Phi)^T \nabla \Phi.$$

(c) Neka je $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je
$$\int_{S(0,1)} u \circ A = r^{-(d-1)} \int_{S(x,r)} u.$$

(d) Posebno, tada je $|S(0,r)| = r^{d-1}|S(0,1)|$, tj. volumen sfere je proporcionalan s r^{d-1}.

5 Deriviranje pod znakom integrala

U poglavljima o Poissonovoj i toplinskoj jednadžbi dolazimo do sličnih zaključaka: ako je Φ bilo elementarno rješenje pripadnog diferencijalnog operatora L, tada je rješenje jednadžbe $Lu = f$ dano konvolucijom
$$u(x) = \Phi * f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y) f(y) dy.$$

Pritom nam je bitno da možemo ovako definirane funkcije derivirati, te s derivacijom ući pod znak integrala (tj. da vrijedi rezultat poput $\frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x} F(x,y)dy$); na INTRAF-u je pokazan odgovarajući rezultat za funkcije dvije varijable na pravokutnicima, a analogon u više dimenzija i za općenitije prostore mjere (primjerice na sferi gdje je pripadna mjera dobivena iz ranije parametrizacije) slijedi primjenom LTDK-a:

Zadatak 6. Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te $f : X \times I \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je za svaki $t \in I$ funkcija $x \mapsto f(x,t)$ u $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ dok je za svaki $x \in X$ funkcija $t \mapsto f(x,t)$ derivabilna na I. Ako postoji $g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ takva da je $\left|\frac{\partial f}{\partial t} f(x,t)\right| \leq g(x)$ za svake $x \in X, t \in I$, pokažite da onda vrijedi
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_X f(x,t) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) d\mu(x).$$

6 Prostor glatkih funkcija s kompaktnim nosačem

Podsjetimo se da smo ranije već spomenuli sljedeći prostor funkcija:
$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}} \text{ je ograničen skup}\}.$$

U ovom trenutku ne znamo niti jednu netrivijalnu funkciju koja pripada tom prostoru, stoga ćemo u sljedećem zadatku pokazati postojanje takve.

Zadatak 7. Označimo s $f(t) = e^{-1/t}\mathbb{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(t)$. Tada je

a) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,

b) funkcija $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\rho(x) = Cf(1 - |x|^2) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

pri čemu je $C = \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{1/(|x|^2-1)} dx \right)^{-1}$, klase C^∞ te vrijedi $\operatorname{supp} \rho = K[0,1]$. Funkciju ρ zovemo još i **standardni izglađivač**.

Napomena 3. Konstanta C služi radi normalizacije integrala, tj. da bi vrijedilo $\int \rho = 1$. Primijetimo također da je ρ radijalna funkcija.

Zadatak 8. Definiramo niz $(\rho_n)_n \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ s $\rho_n(x) := n^d \rho(x)$.

(a) Vrijedi: $\operatorname{supp} \rho_n = K[0, 1/n]$, $\int \rho_n = 1$.

(b) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen skup. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\Omega_n := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \frac{2}{n}\}.$$

Neka je $u \in C(\Omega)$, te stavimo $u_n := u \cdot \mathbb{1}_{\Omega_n}$ Dokažite da je $\operatorname{supp} \rho_n * u_n \subseteq \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > 1/n\}$ te da je $\rho_n * u_n \in C_c^\infty(\Omega)$.

(c) Neka je sada $v \in C(\Omega)$ takva da je $\operatorname{supp} v$ kompaktno sadržan u Ω (tj. postoji otvoreni skup Ω' takav da je $\operatorname{supp} v \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$). Dokažite da tada niz $\rho_n * v_n$ konvergira uniformno k v na Ω, počevši od dovoljno velikog n takvog da je $\rho_n * v_n$ dobro definiran (tj. od takvog n da je $d(\operatorname{supp} v, \partial\Omega) > 1/n$).

Napomena 4. Prethodne aproksimacije funkcije u glatkim (C^∞) funkcijama u unutrašnjosti skupa se pojavljuju u dokazu glatkoće harmoničkih funkcija.

Prethodni rezultat nam daje način kako od funkcije koja nije nužno glatka dobiti dovoljno dobru aproksimaciju iste, uz uvjet da nosač funkcije "ne ide preblizu rubu". Taj rezultat najčešće kombiniramo sa sljedećim, a to je tzv. **cutoff funkcija**, koja zapravo predstavlja glatku verziju karakteristične funkcije skupa.

Zadatak 9. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren te $K \subseteq \Omega$ kompaktan. Označimo s $\delta = d(K, \partial\Omega) > 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{4}{n} < \delta$ te stavimo redom

$$K_n = \{x \in \Omega : d(x, K) < 2/n\}, \quad \psi = \rho_n * \mathbb{1}_{K_n}.$$

Tada vrijedi:

(a) $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$,

(b) $0 \leq \psi \leq 1$,

(c) $\psi \equiv 1$ na skupu $\{x \in \Omega : d(x, K) < 1/n\}$.