

## 5. PARCIJALNE DERIVACIJE

5.1. Izračunajte parcijalne derivacije sljedećih funkcija:

(a)  $f(x, y) = x^2 + y,$

(b)  $f(x, y) = xy + xy^2,$

(c)  $f(x, y) = \frac{x^2y + y^3x}{x + y^2},$

(d)  $f(x, y) = x \cos x \cos y,$

(e)  $f(x, y) = e^x \cos(x + y),$

(f)  $f(x, y) = e^{xy} \ln(x^2 + y^2),$

(g)  $f(x, y, z) = \frac{\sin(x + yz)}{xz}.$

5.2. Izračunajte matricu parcijalnih derivacija sljedećih funkcija:

(a)  $f(x, y) = (x + y, yx),$

(b)  $f(x, y) = (x^2 + \sin y, e^x + xy^2),$

(c)  $f(x, y, z) = (\sin x \cos y + z^2, xz),$

(d)  $f(x, y, z) = (x \sin y, y^2z + \ln x, \arctg z),$

(e)  $f(x, y, z) = (\sin xy, yz^2 + \sin x, 4x + y^2, z \cos x),$

(f)  $f(x, y, z, u, v) = x^2 + ux + 3zv^2 + y^3 - y,$

(g)  $f(x) = (x^3 + 2 \sin x, -x + e^x, 2x),$

- (h)  $f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2),$
- (i)  $f(x, y) = (e^x, \sin xy),$
- (j)  $f(x, y) = (x + y, x - y, xy).$

5.3. Izračunajte derivaciju  $\frac{df \circ g}{dt}$  kompozicije sljedećih funkcija:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + e^y, g(t) = (\sin t, t),$
- (b)  $f(x, y) = x \cos y, g(t) = (t^2, t),$
- (c)  $f(x, y) = xy, g(t) = (e^t, \cos t),$
- (d)  $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}, g(t) = (t, -t).$

5.4. Izračunajte parcijalnu derivaciju  $\frac{\partial f \circ g}{\partial u}$  kompozicije sljedećih funkcija:

- (a)  $f(x, y) = xy + y, g(u, v) = (u^2 + v, uv),$
- (b)  $f(x, y) = x + \sin y, g(u, v) = (u^2, u + v),$
- (c)  $f(x, y) = x^2 + y^2, g(u, v) = (e^{-u-v}, e^{uv}),$
- (d)  $f(x, y) = \cos x \sin y, g(u, v) = (\cos(v^2 u), \ln \sqrt{1 + u^2})$  u  $(1, 0).$

5.5. Izračunajte diferencijal kompozicije  $f \circ g$  sljedećih funkcija:

- (a)  $f(x, y) = (y + \ln(1 + x), y), g(u, v) = (u - v, v + 1)$  u  $(0, 0),$
- (b)  $f(x, y) = (y^2, \sin x), g(u, v) = (v + \cos v, u + \cos u)$  u  $(0, 0),$
- (c)  $f(x, y) = (\operatorname{tg}(x - 1) - e^y, x^2 - y^2), g(u, v) = (e^{u-v}, u - v)$  u  $(1, 1),$
- (d)  $f(x, y, z) = (e^{x-z}, \cos(x + y) + \sin(x + y + z)),$   
 $g(u, v) = (e^u, \cos(v - u), e^{-v})$  u  $(0, 0).$

5.6. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na:

- (a) plohu  $x^2 + y - z = 0$  u točki  $(1, 0, 1)$ ,
- (b) graf funkcije  $f(x, y) = \sin x + xy^2$  koja prolazi točkom  $(0, 2, 0)$ ,
- (c) graf funkcije  $f(x, y) = xy + \ln y$  koja prolazi točkom  $(1, 1, 1)$ ,
- (d) plohu  $x^2 + y^3 - z = 0$  u točki  $(3, 1, 10)$ ,
- (e) plohu  $xyz = 1$  u točki  $(1, 1, 1)$ ,
- (f) graf funkcije  $f(x, y) = \sin(xy)$  koja prolazi točkom  $(1, \pi, 0)$ .

5.7. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na nivo skup funkcije  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  kroz  $(1, 1, 0)$  u točki  $(1, 1, 0)$ .

5.8. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na:

- (a) plohu  $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$  u točki  $(2, -3, 4)$ ,
- (b) graf funkcije  $f(x, y) = e^x \sin y$  koja prolazi točkom  $(\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3)$ .

5.9. Odredite presjek tangencijalnih ravnina na plohe  $xy + z = 0$  i  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  u točki  $(2, 1, -2)$ .

5.10. Izračunajte kut između ploha  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  i  $x - z^2 - y^2 = -3$  u točki  $(-1, 1, -1)$ .

5.11. Odredite derivaciju funkcije:

(a)  $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$  u točki  $(1, 2)$  duž vektora  $(3/5, 4/5)$ ,

(b)  $f(x, y, z) = e^x + yz$  u točki  $(1, 1, 1)$  duž vektora  $(1, -1, 1)$ .

5.12. Kapetan Ivo je u nevolji. Kraj sunčane strane Merkura temperatura trupa broda je dana funkcijom

$$f(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}.$$

Ako se brod trenutno nalazi u točki  $(1, 1, 1)$ , u kojem smjeru treba nastaviti da najbrže smanji temperaturu?

5.13. Mrav se nalazi u ishodištu koordinatnog sustava u toksičnoj atmosferi. Koncentracija toksina je dana funkcijom

$$f(x, y, z) = e^{-3x} + \sin(yz) + e^{-y^2}.$$

U kojem smjeru treba mrav bježati da se koncentracija toksina najbrže smanji?

- 5.14. Odredite u kojim tačkama parametarski zadana krivulja  $c(t) = (2t^2, 1 - t, 3 + t^2)$  siječe ravninu  $3x - 14y + z - 10 = 0$ .
- 5.15. Napišite parametarsku jednadžbu tangente na parametarski zadanu krivulju:
- $c(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$  u trenutku  $t_0 = 0$ ,
  - $c(t) = (\cos(4t), \sin(4t), t)$  u trenutku  $t_0 = \pi/8$ ,
  - $c(t) = (t, 2t, t^2)$  u tački  $(1, 2, 1)$ ,
  - $c(t) = (e^{3t}, e^{-3t}, \sqrt[3]{2}t)$  u trenutku  $t_0 = 1$ .
- 5.16. Pokažite da se krivulje  $c_1(t) = (e^t, e^{2t}, 1 - e^{-t})$  i  $c_2(t) = (1 - t, \cos t, \sin t)$  sijeku u tački  $(1, 1, 0)$  i izračunajte kut između njihovih tangenti u toj tački.
- 5.17. Izračunajte kut između tangenti na krivulje  $c$  i  $c'$  za parametarski zadanu krivulju  $c(t) = (\ln(1 + t^2), 2 \operatorname{arctg} t - t, t)$  u svakoj tački te krivulje.
- 5.18. Čestica se kreće u ravnini po krivulji  $c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ . Izračunajte kut između vektora brzine i položaja čestice u svakom trenutku  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

5.19. Izračunajte duljinu luka krivulje:

(a)  $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$  od  $t = 0$  do  $t = 1$ ,

(b)  $c(t) = (t, 2t, t^2)$  od  $t = 0$  do  $t = 1$ ,

(c)  $c(t) = (e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}t)$  od  $t = 0$  do  $t = 1/3$ ,

(d)  $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  od  $t = 0$  do  $t = \pi$ ,

(e)  $c(t) = (t, \ln t)$  od  $t = \sqrt{3}$  do  $t = 2\sqrt{2}$ ,

(f)  $c(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$  od  $t = 0$  do  $t = 1$ ,

(g)  $c(t) = (t, \ln \cos t)$  od  $t = 0$  do  $t = \pi/4$ .

- 5.1. (a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1$ ,
- (b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + y^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2xy$ ,
- (c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 + 2xy}{y^2 + x} - \frac{xy^3 + x^2y}{(y^2 + x)^2}$ ,  
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3xy^2 + x^2}{y^2 + x} - \frac{2y(xy^3 + x^2y)}{(y^2 + x)^2}$ ,
- (d)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x \cos y - x \sin x \cos y$ ,  
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \cos x \sin y$ ,
- (e)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(x + y) - e^x \sin(x + y)$ ,  
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin(x + y)$ ,
- (f)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} \ln(x^2 + y^2) + 2xe^{xy} \frac{1}{x^2 + y^2}$ ,  
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} \ln(x^2 + y^2) + 2ye^{xy} \frac{1}{x^2 + y^2}$ ,
- (g)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\cos(x+yz)}{xz} - \frac{\sin(x+yz)}{x^2z}$ ,  
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\cos(x+yz)}{x}$ ,  
 $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{y \cos(x+yz)}{xz} - \frac{\sin(x+yz)}{xz^2}$ .

- 5.2. (a)  $Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix},$
- (b)  $Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & \cos y \\ e^x + y^2 & 2xy \end{bmatrix},$
- (c)  $Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y & 2z \\ z & 0 & x \end{bmatrix},$
- (d)  $Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sin y & x \cos y & 0 \\ \frac{1}{x} & 2yz & y^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+z^2} \end{bmatrix},$
- (e)  $Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} y \cos xy & x \cos xy & 0 \\ \cos x & z^2 & 2yz \\ 4 & 2y & 0 \\ -z \sin x & 0 & \cos x \end{bmatrix},$
- (f)  $Df(x, y, z, u, v) = [2x + u \quad 3y^2 - 1 \quad 3v^2 \quad x \quad 6zv],$
- (g)  $Df(x) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 2 \cos x \\ e^x - 1 \\ 2 \end{bmatrix},$
- (h)  $Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix},$

$$(i) Df(x, y) = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ y \cos xy & x \cos xy \end{bmatrix},$$

$$(j) Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y & x \end{bmatrix}.$$

- 5.3. (a)  $2 \sin t \cos t + e^t$ ,  
(b)  $2t \cos t - t^2 \sin t$ ,  
(c)  $e^t \cos t - e^t \sin t$ ,  
(d)  $e^{2t^2}$ .

- 5.4. (a)  $2u^2v + (u^2 + v + 1)v$ ,  
(b)  $2u + \cos(u + v)$ ,  
(c)  $2(-e^{-2u-2v} + ve^{2uv})$ ,  
(d)  $\frac{1}{2} \cos 1 \cos(\ln \sqrt{2})$ .

- 5.5. (a)  $D(f \circ g)(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  
(b)  $D(f \circ g)(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \cos 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos 1 \end{bmatrix}$ ,  
(c)  $D(f \circ g)(1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ,

$$(d) D(f \circ g)(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \cos 3 - \sin 2 & \cos 3 \end{bmatrix}.$$

5.6. (a)  $2x + y - z - 1 = 0,$

(b)  $5x - z = 0,$

(c)  $x + 2y - z - 2 = 0,$

(d)  $6x + 3y - z - 11 = 0,$

(e)  $x + y + z - 3 = 0,$

(f)  $\pi x + y + z - 2\pi = 0.$

5.7.  $x + y + 2z - 2 = 0.$

5.8. (a)  $13x + 15y + z + 15 = 0, \frac{x-2}{-13} = \frac{y+3}{-15} = \frac{z-4}{-1},$

(b)  $3x + z + 3 - 3\ln 3 = 0, \frac{x - \ln 3}{-3} = \frac{y - \frac{3\pi}{2}}{0} = \frac{z + 3}{-1}.$

5.9.  $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-3}.$

5.10.  $\arccos \frac{5}{3\sqrt{3}}.$

5.11. (a)  $-5,$

(b)  $e.$

5.12.  $2e^{-6}(1, 2, 3).$

5.13.  $(3, 0, 0)$ .

5.14.  $T_1(2, 0, 4), T_2(18, 4, 12)$ .

5.15. (a)  $(x(r), y(r), z(r)) = (1, 0, 0) + r \cdot (0, 3, 1), r \in \mathbb{R}$ ,

(b)  $(x(r), y(r), z(r)) = (0, 1, \pi/8) + r \cdot (-4, 0, 1), r \in \mathbb{R}$ ,

(c)  $(x(r), y(r), z(r)) = (1, 2, 1) + r \cdot (1, 2, 2), r \in \mathbb{R}$ ,

(d)  $(x(r), y(r), z(r)) = (e^3, e^{-3}, \sqrt[3]{2}) + r \cdot (3e^3, -3e^{-3}, \sqrt[3]{2}), r \in \mathbb{R}$ .

5.16.  $\frac{\pi}{2}$ .

5.17.  $\frac{\pi}{2}$ .

5.18.  $\frac{\pi}{4}$ .

5.19. (a)  $\sqrt{2}$ ,

(b)  $\frac{5}{8} \ln 5 + \frac{3}{2}$ ,

(c)  $e - \frac{1}{e}$ ,

(d) 4,

(e)  $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ ,

(f)  $\frac{5}{3}$ ,

(g)  $\frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})$ .