# 1 Ponavljanje linearne algebre

## 1.1 Vektorski prostori

**Zadatak 1.** U $\mathbb{R}^5$ su dani vektori: $a_1 = (1,2,3,4,5)$, $a_2 = (1,-1,1,-1,1)$, $a_3 = (2,-1,3,1,-1)$, $b_1 = (1,0,0,-6,24)$, $b_2 = (0,1,0,-1,10)$, $b_3 = (0,0,1,4,-13)$. Dokažite da vrijedi $[\{a_1,a_2,a_3\}] = [\{b_1,b_2,b_3\}]$.

**Zadatak 2.** Neka je $V$ konačno-dimenzionalan vektorski prostor, $L \leqslant V$, $L \neq V$. Dokažite da postoji baza od V čiji niti jedan element ne leži u $L$.

**Zadatak 3.** Neka je $V$ konačno-dimenzionalan vektorski prostor i neka su $L$, $M \leqslant V$. Dokažite: Postoji zajednički direktni komplement od $L$ i $M$ ako i samo ako vrijedi $\dim L = \dim M$.

**Definicija.** Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, $L \leqslant V$. Na $V$ zadajemo relaciju ekvivalencije $\sim$ : za $x$, $y \in V$, $x \sim y \overset{def}{\Leftrightarrow} x - y \in L$. Klasa ekvivalencije koja sadrži $x$ je $\overline{x} = \{x + z \ : \ z \in L\}$. Skup svih klasa ekvivalencije (kvocijentni skup) označavamo $V/L$. Za $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ definiramo: $(x + L) + (y + L) := (x + y) + L$ i $\alpha(x + L) := \alpha x + L$. Uz gornje operacije $V/L$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ kojeg nazivamo *kvocijentni prostor* prostora $V$ po potprostoru $L$.

**Napomena.** Ako je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ baza nekog direktnog komplementa potprostora $L$ u $V$, onda je $\{e_1 + L, \ldots, e_m + L\}$ baza za $V/L$. Specijalno, ako je $V$ konačno-dimenzionalan, onda vrijedi $\dim V/L = \dim V - \dim L$.

**Zadatak 4.** Neka je $V = \mathbb{R}^4$ (nad $\mathbb{R}$) i neka je potprostor $L \leqslant V$ razapet vektorima: $a_1 = (1,-1,0,0)$, $a_2 = (0,1,-1,0)$, $a_3 = (0,0,1,-1)$, $a_4 = (1,0,0,-1)$. Odredite $\dim V/L$ i nađite neku bazu od $V/L$.

Rješenje: $\dim L = 3$, baza $\{(1,0,0,0) + L\}$.

**Zadatak 5.** $l^\infty$ = skup svih ograničenih nizova u $\mathbb{R}$, $c$ = skup svih konvergentnih nizova u $\mathbb{R}$, $c_0$ = skup svih konvergentnih nizova u $\mathbb{R}$ s limesom 0. Dokažite:

(a) $l^\infty$ je potprostor realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ svih nizova realnih brojeva.

(b) Skup $\{x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n, \ldots) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ je linearno nezavisan u $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

(c) $c$ je potprostor od $l^\infty$ (pa onda i od $\mathbb{R}^\mathbb{N}$).

(d) $c_0$ je potprostor od $c$ (pa onda i od $l^\infty$ i od $\mathbb{R}^\mathbb{N}$).

(e) $\dim c/c_0 = 1$ (Kažemo da $c_0$ ima kodimeziju 1 u $c$.)

(f) Skup $A$ svih aritmetičkih nizova realnih brojeva je potprostor od $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Nađite mu bazu i dimenziju.

## 1.2 Dualni prostor

Neka je $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Koristimo oznaku $V^* := L(V, \mathbb{K})$ = vektorski prostor (nad $\mathbb{K}$) svih linearnih operatora sa $V$ u $\mathbb{K}$ (tzv. linearnih funkcionala na $V$).

Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza vektorskog prostora $V$. Baza $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ od $V^*$ definirana sa

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{za } j = i \\ 0\,, & \text{za } j \neq i \end{cases} \qquad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

zove se *dualna baza* prostora $V^*$ za bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostora $V$. Evidentno je $\dim V^* = \dim V$.

Ako je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza vektorskog prostora $V$, a $g \in V^*$ neki funkcional, onda vrijednosti $g(e_1), \dots, g(e_n)$ u potpunosti određuju funkcional $g$. Tada matrični prikaz operatora $g$ u bazi $\{e_1, \dots, e_n\}$ izgleda ovako: $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ i to je element od $\mathbb{K}^n$.

**Zadatak 1.**

(a) Pokažite da su stupci matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (e_1', e_2', e_3') = E'$ baza u $\mathbb{R}^3$.

(b) Funkcional $g \in (\mathbb{R}^3)^*$ je u bazi $E'$ zadan matricom $(2, 1, 1)$. Nađite matricu od $g$ u kanonskoj bazi.

(c) Nađite dualnu bazu baze $\{e_1', e_2', e_3'\}$.

(d) Nađite koordinate vektora $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ u bazi $E'$.

Rješenja: (b) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right)$, (c) $e_1'^*(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3$, $e_2'^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{5}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3$, $e_3'^*(x_1, x_2, x_3) = -\frac{2}{7}x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3$, (d) $\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{1}{7}\right)$.

Svaki vektorski prostor $W \leqslant V$ se može zadati kao linearna ljuska nekih vektora iz $V$, no može se zadati i kao skup rješenja homogenog sustava jednadžbi. Naime, ako je $\{v_1, \dots, v_p\}$ baza vektorskog prostora $W \leqslant V$, možemo je nadopuniti do baze $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ vektorskog prostora $V$. Toj bazi pridružimo dualnu bazu $\left\{v_1^*, \dots, v_p^*, v_{p+1}^*, \dots, v_n^*\right\}$, $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

$$W = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}\} = \left\{x \in V \mid v_{p+1}^*(x) = \dots = v_n^*(x) = 0\right\}$$

**Zadatak 2.** Napišite $W = [\{a_1, a_2\}]$, gdje je $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kao skup rješenja $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$.

Rješenje: $W = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$.

**Zadatak 3.** Neka je $W = [\{a_1, a_2, a_3\}] \subseteq \mathbb{R}^3$, gdje je $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Napišite $W$ kao skup rješenja homogenog sustava jednadžbi.

Rješenje: $W = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0,\ -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0\right\}$.

**Zadatak 4.** Neka je $\dim V = n \geqslant 3$ i neka su $f_1,\ f_2,\ f_3 \in V^*$ linearno nezavisni. Kolika je dimenzija vektorskog prostora $W = \{x \in V \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$?

Rješenje: $\dim W = n - 3$.

**Definicija.** Neka je $V$ $n$-dimenzionalni vektorski prostor, $W \leqslant V$. Tada skup

$$W^\perp = \{f \in V^* \mid f(x) = 0,\ \forall x \in W\}$$

zovemo *anihilator potprostora* $W$.

Anihilator je vektorski prostor i vrijedi $\dim W + \dim W^\perp = n$.

**Zadatak 5.** Dokažite $(W^{\perp})^{\perp} \cong W$.

**Napomena.** Ako je $V$ vektorski prostor, $S \subseteq V^*$, tada sa $S^0$ ili $S^{\perp}$ označavamo skup

$$S^{\perp} := \{ v \in V \mid (\forall f \in S)\,(f(v) = 0) \} \subseteq V$$

i zovemo ga *anihilator skupa* $S$.

Uočite da uz takvu definiciju u prethodnom zadatku vrijedi baš jednakost $(W^{\perp})^{\perp} = W$. Zapravo je svejedno definiramo li $S^{\perp}$ na gornji način ili kao

$$S^{\perp} = \{ g \in V^{**} \mid (\forall f \in S)\,(g(f) = 0) \}$$

jer je konačno-dimenzionalan vektorski prostor prirodno izomorfan svom drugom dualu.

**Definicija.** Neka je $A \in L(V)$. Definiramo preslikavanje $A' \colon W^* \to V^*$ s $A'(g) = g \circ A$.

**Zadatak 6.** $A'$ je linearan operator.

**Zadatak 7.** $(AB)' = B'A'$, za $B \colon V \to W$, $A \colon W \to U$.

Neka su $V$, $W$ konačno-dimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$, $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ baza prostora $V$, $(f) = (f_1, \ldots, f_m)$ baza prostora $W$ i $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i$ za $j = 1, \ldots, n$. Matricu

$$A(f,e) := \left[ \begin{matrix} Ae_1, \ldots, Ae_n \end{matrix} \right] \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{matrix}$$

zovemo *matrični prikaz operatora* $A$ u paru baza $(e)$, $(f)$.

$$(Ax)(f) = A(f,e) \cdot x(e)$$

Neka je $V$ konačno-dimenzionalan vektorski prostor, $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ i $(e') = (e'_1, \ldots, e'_n)$ baze prostora $V$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} e_i$ za $j = 1, \ldots, n$. Matricu

$$S = \left[ \begin{matrix} e'_1, \ldots, e'_n \end{matrix} \right] \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

zovemo *matrica prijelaza iz baze* $(e)$ *u bazu* $(e')$. Zapravo, $S = I_V(e, e')$.

Neka su $V$, $W$ konačno-dimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$, $(e)$, $(e')$ baze od $V$, $(f)$, $(f')$ baze od $W$, $S$ matrica prijelaza iz $(e)$ u $(e')$, $T$ matrica prijelaza iz $(f)$ u $(f')$. Za $A \in L(V,W)$ vrijedi

$$A(f', e') = T^{-1} \cdot A(f,e) \cdot S.$$

Za vektor $x \in V$ vrijedi

$$x(e') = S^{-1} \cdot x(e).$$

**Napomena.** Neka su $V$, $W$ konačno-dimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$, $(e)$ baza za $V$, , $(e^*)$ njoj dualna baza za $V^*$, $(f)$ baza za $W$, , $(f^*)$ njoj dualna baza za $W^*$. Za svaki $A \in L(V,W)$ vrijedi $A'(e^*, f^*) = A(f,e)^\tau$. Stoga je $\mathrm{r}(A^*) = \mathrm{r}(A)$.

Rang linearnog operatora $A \in L(V,W)$ jednak je rangu njegove matrice $A(f,e)$ u bilo kojem paru baza $(e)$, $(f)$ vektorskih prostora $V$, $W$.

**Zadatak 8.** $A \in L(\mathbb{R}^4)$ ima u kanonskoj bazi $(e)$ matricu

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definirajmo: $e_1' := e_1$, $e_2' := e_1 + e_2$, $e_3' := e_1 + e_2 + e_3$, $e_4' := e_1 + e_2 + e_3 + e_4$,
$e_1'' := e_1$, $e_2'' := e_2$, $e_3'' := e_4$, $e_4'' := e_3$.

(a) Pokažite da su $(e') = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ i $(e'') = (e_1'', e_2'', e_3'', e_4'')$ baze od $\mathbb{R}^4$.

(b) Za vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ odredite $Ax$ u kanonskoj bazi i u bazama $(e')$ i $(e'')$.

(c) Nađite $A(e')$ i $A(e'')$.

(d) Ako vektor $y \in \mathbb{R}^4$ u bazi $(e')$ ima matricu $y(e) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, nađite $Ay$ u bazama $(e)$, $(e')$, $(e'')$.

Rješenja: (b) $(Ax)(e) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $(Ax)(e') = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $(Ax)(e'') = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, (c) $A(e') = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $A(e'') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, (d) $(Ay)(e) = \begin{bmatrix} -24 \\ -32 \\ -51 \\ -42 \end{bmatrix}$, $(Ay)(e') = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ -9 \\ -42 \end{bmatrix}$, $(Ay)(e'') = \begin{bmatrix} -24 \\ -32 \\ -42 \\ -51 \end{bmatrix}$.

## 1.3 Spektar, svojstveni polinom i minimalni polinom

Neka je $V$ konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, $A \in L(V)$.

*Svojstvena vrijednost operatora* $A$ je svaki $\lambda \in \mathbb{K}$ takav da postoji $v \in V \setminus \{0\}$ za koji vrijedi $Av = \lambda v$. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora $A$ nazivamo *spektar operatora* $A$ i označavamo $\sigma(A)$. Dakle,

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid A - \lambda I \text{ je singularan}\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Za $\lambda_0 \in \sigma(A)$ pišemo

$$V_{\lambda_0} := \{v \in V \mid Av = \lambda_0 v\} = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I) \leqslant V$$

i zovemo ga *svojstveni potprostor operatora* $A$ *pridružen svojstvenoj vrijednosti* $\lambda_0$. Njegovu dimenziju, tj. $\mathrm{d}(A - \lambda_0 I)$ zovemo *geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti* $\lambda_0$.

*Karakteristični polinom operatora* $A$ je

$$k_A(\lambda) := \det(A - \lambda I),$$

$$k_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A) \lambda^{n-1} + \ldots + \det A.$$

Evidentno, $\lambda_0 \in \sigma(A) \Leftrightarrow k_A(\lambda_0) = 0$.

*Algebarska kratnost svojstvene vrijednosti* $\lambda_0 \in \sigma(A)$ operatora $A$ je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot p(\lambda)$ za neki polinom $p(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$, $p(\lambda_0) \neq 0$. Geometrijska kratnost je manja ili jednaka od algebarske kratnosti, $1 \leqslant g_{\lambda_0} \leqslant a_{\lambda_0}$.

**Zadatak 1.** Linearni operator $A \in L(V)$ u nekoj bazi $(e)$ od $V$ zadan je matricom

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nađite svojstvene vrijednosti od $A$ te njihove algebarske i geometrijske kratnosti.

Rješenje: $\sigma(A) = \{1, 2\}$; algebarska kratnost od 1 je 2, od 2 je 1; geometrijska kratnost od 2 je 1, od 1 je 1.

**Hamilton-Cayleyev teorem.** $k_A(A) = 0$.

**Definicija.** *Minimalni polinom operatora* $A$ je normirani polinom $\mu_A \in \mathbb{K}[\lambda]$ najnižeg stupnja za koji vrijedi $\mu_A(A) = 0$.

**Napomena.** Za polinom $p \in \mathbb{K}[\lambda]$ vrijedi: $p(A) = 0 \Leftrightarrow \mu_A \mid p$.

**Teorem.** Neka je $V$ konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i $A \in L(V)$. Minimalni polinom $\mu_A$ i karakteristični polinom $k_A$ imaju iste ireducibilne normirane faktore.

**Postupak za pronalaženje minimalnog polinoma.** [Kurepa, str. 79.-83.]

Formiramo matrice

$$\begin{array}{cccccc} I & A & A^2 & \dots & A^k & \dots \\ & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} & \dots \\ & & A_{22} & \dots & A_{2k} & \dots \\ & & & & \vdots & \\ & & & & A_{kk} & \dots \end{array}$$

na sljedeći način:

$A_{11} = A - \beta_{11} I$, $A_{12} = A^2 - \beta_{12} I$, $\dots$, $A_{1k} = A^k - \beta_{1k} I$, $\dots$

$A_{k+1,j} = A_{kj} - \beta_{k+1,j} A_{kk}$, $j = k+1, \dots$

$\beta_{1k}$ biramo tako da matrica $A_{1k}$ ima nulu na mjestu $(1, 1)$.

$\beta_{k+1,j}$ biramo tako da matrica $A_{k+1,j}$ na mjestu $(i_k, j_k)$ ima nulu, pri čemu je $(i_k, j_k)$ neko mjesto na kojem matrica $A_{kk}$ ima element različit od nule (ako takav postoji).

Postupak završavamo kada za neki $m \in \mathbb{N}$ dobijemo $A_{mm} = 0$.

**Zadatak 2.** Za operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

nađite minimalni polinom $\mu_A$.

Rješenje: $\mu_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda + 16$.

**Zadatak 3.** Odredite minimalni polinom operatora $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadanog na kanonskoj bazi $(e)$ od $\mathbb{C}^3$ matričnim prikazom

$$A(e) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Je li operator $A$ dijagonalizabilan?

Rješenje: $\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^3$, operator $A$ nije dijagonalizabilan.

**Zadatak 4.** Neka je $V$ kompleksan $n$-dimenzionalan vektorski prostor, $n > 1$ i neka je $A \in L(V)$ takav da vrijedi $\mathrm{r}(A) = 1$, $\mathrm{tr}(A) + \det(A) = n$. Nađite $k_A$ i $\mu_A$.

Rješenje: $k_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - n)$, $\mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda - n)$.

**Napomena.** Element $A \in L(V)$ je regularan ako i samo ako je slobodni član $-\mu_m$ pripadnog minimalnog polinoma

$$\mu(\lambda) = \lambda^m - \mu_1\lambda^{m-1} - \ldots - \mu_{m-1}\lambda - \mu_m$$

različit od nule. U tom slučaju je

$$A^{-1} = \frac{1}{\mu_m}\left(A^{m-1} - \mu_1 A^{m-2} - \ldots - \mu_{m-1} I\right).$$

**Zadatak 5.** Operator $A$ je dan matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odredite parametre $a$ i $b$ ako je poznato da je $A$ singularna matrica čije svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 2.

Rješenje: $a = 0$, $b = -1$.

**Zadataka 6.** Neka je $A$ linearan operator sa spektrom $\{-4, -1, 4, 6\}$. Odredite sve $\lambda \in \mathbb{Z}$ takve da je operator $A^2 - \lambda^2 I$ singularan.

Rješenje:$\lambda \in \{-6, -4, -1, 1, 4, 6\}$

**Zadatak 7.** Neka je $A \in L(\mathbb{C}^4)$ (nad poljem $\mathbb{C}$) zadan matricom (u nekoj bazi $(f)$)

$$A(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odredite minimalni polinom od $A$, zatim odredite karakteristični polinom od $A$ i ispitajte je li operator $A$ dijagonalizabilan. Nadalje, izračunajte $A^{2008} - 4A^{2007} + 4A^{2006} + I$.

Rješenje: $\mu_A(\lambda) = (\lambda-2)^2$, $k_A(\lambda) = (\lambda-2)^4$, $A$ nije dijagonalizabilan, $A^{2008} - 4A^{2007} + 4A^{2006} + I = I$.