Kolegij *Studentska natjecanja*, ak. god. 2023./2024.
http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/studnatj/

Tema br. 13:

Regularna distribucija

Lukas Novak
lukas.novak@math.hr

1 Kroneckerov teorem o gustoći

Teorem 1 (Kronecker). *Neka je a iracionalan broj. Tada je niz $(\{na\})_{n\in\mathbb{N}}$ gust u $[0,1]$.*

Napomena 1. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ je *razlomljeni dio* realnog broja x.

Primjer 1. Dokažite da niz $(\lfloor n\sqrt{2024}\rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ sadrži proizvoljno dugački geometrijski niz proizvoljno velikog (pozitivnog) kvocijenta.

Rješenje. Neka su $N, q \in \mathbb{N}$ proizvoljni. Pokazat ćemo da možemo pronaći geometrijski niz duljine N s kvocijentom q. Želimo naći prirodan broj m tako da vrijedi $\lfloor q^k m\sqrt{2024}\rfloor = q^k \lfloor m\sqrt{2024}\rfloor$ za svaki $k = 1, 2, \ldots, N$.

Iz gornjeg imamo da tada mora vrijediti

$$\left\lfloor q^k m\sqrt{2024} - q^k \left\lfloor m\sqrt{2024}\right\rfloor\right\rfloor = \left\lfloor q^k \left\{m\sqrt{2024}\right\}\right\rfloor = 0$$

za svaki $k = 1, 2, \ldots, N$. To znači da mora biti $\left\{m\sqrt{2024}\right\} < \frac{1}{q^N}$. Direktnom primjenom Kroneckerovog teorema (za $a = \sqrt{2024}$) slijedi da takav m zaista postoji i time smo dokazali tvrdnju. □

Primjer 2. Neka je k prirodan broj i $a > 1$ realan broj takav da je $\log a$ iracionalan. Označimo s x_n broj koji dobijemo do prvih k znamenki broja $\lfloor a^n \rfloor$ (npr. za $k = 2$ i $a = 2$ je $x_{10} = 10$). Dokažite da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nikad ne postane periodičan od nekog mjesta nadalje.

Rješenje. Izvedimo najprije formulu kako za prirodni broj $N = \overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_l}$ dobiti broj koji se sastoji od k prvih znamenaka, tj. broj $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$. Uočimo da je

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k} = \left\lfloor \frac{N}{10^{l-k}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N}{10^{\lfloor \log N\rfloor+1-k}} \right\rfloor = \left\lfloor 10^{k-1+\{\log N\}} \right\rfloor.$$

Iz gornjeg slijedi da je tada $x_n = \left\lfloor 10^{k-1+\{\log\lfloor a^n\rfloor\}}\right\rfloor$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eventualno postane periodičan. Tada postoji period $T \in \mathbb{N}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $x_{n+T} = x_n$ za svaki $n \geq n_0$. Pokažimo najprije da postoji prirodan broj r takav da je $x_{rT} > 10^{k-1}$. Pretpostavimo da takav r ne postoji. Tada je $x_{rT} = 10^{k-1}$ za svaki prirodan broj r. Korištenjem formule za x_n slijedi da je $10^{k-1+\left\{\log\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\}} < 10^{k-1}+1$, odnosno $\left\{\log\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\} < \log\left(1+\dfrac{1}{10^{k-1}}\right)$. Sada redom imamo

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right) &> \left\{\log\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\} = \log\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor - \left\lfloor\log\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\rfloor > \log\left(a^{rT}-1\right) - \left\lfloor\log\left(a^{rT}\right)\right\rfloor \\ &= \log\left(a^{rT}-1\right) - \log\left(a^{rT}\right) + \log\left(a^{rT}\right) - \left\lfloor\log\left(a^{rT}\right)\right\rfloor \\ &= \{rT\log a\} + \log\left(1-\frac{1}{a^{rT}}\right)\end{aligned}$$

Međutim gornja nejednakost ne može vrijediti za sve prirodne brojeve r. Naime, pomoću Kroneckerovog teorema možemo pronaći niz brojeva $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvih da vrijedi $\{r_nT\log a\} \geq 1-\dfrac{1}{n}$. Za takve r_n će tada biti $\log\left(1+\dfrac{1}{10^{k-1}}\right) \geq 1-\dfrac{1}{n}+\log\left(1-\frac{1}{a^{r_nT}}\right)$ što očito ne može vrijediti za sve prirodne brojeve n.

Neka je r prirodan broj tako da vrijedi $x_{rT} > 10^{k-1}$. Tada zbog periodičnosti slijedi $x_{nT} > 10^{k-1}$ za sve prirodne brojeve $n > r$. Iz formule za x_n dobivamo da je tada $10^{k-1+\left\{\log\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\}} \geq 10^{k-1}+1$, odnosno da je $\left\{\log\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\} \geq \log\left(1+\dfrac{1}{10^{k-1}}\right)$. Iz gornjeg slijedi da je

$$\log\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right) \leq \log\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor - \left\lfloor\log\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\rfloor \leq \log a^{nT} - \left\lfloor\log a^{nT}\right\rfloor = \{nT\log a\}$$

za svaki prirodan broj $n > r$. Međutim to je u kontradikciji s Kroneckerovim teoremom jer u tom slučaju niz $(\{nT\log a\})_{n\in\mathbb{N}}$ nije gust. □

Primjer 3. Neka je $r \in \langle 0,1\rangle$. Označimo sa $S(r)$ skup svih prirodnih brojeva n za koje interval $\langle nr,(n+1)r\rangle$ sadrži točno jedan prirodan broj. Dokažite da je r iracionalan ako i samo ako za svaki prirodan broj M u skupu $S(r)$ postoji potpun sustav ostataka modulo M.

Rješenje. Pretpostavimo da $S(r)$ sadrži potpun sustav ostataka modulo M za sve prirodne brojeve M. Nadalje pretpostavimo suprotno, tj. da je r racionalan broj. Neka je N nazivnik od r. Uočimo da tada za višekratnike $n = Na$ broja N interval $\langle nr,(n+1)r\rangle$ očito ne sadrži prirodan broj. Dakle, $S(r)$ ne sadrži niti jedan višekratnik broja N pa time ne može biti potpun sustav ostataka modulo N što daje kontradikciju s početnom pretpostavkom.

Obratno, pretpostavimo da je r iracionala. Uzmimo prirodan broj M i cijeli broj m takav da je $0 \leq m < M$. Želimo naći $n \in S(r)$ takav da je $n \equiv m \pmod M$. Da bi n bio u $S(r)$ mora postojati neki prirodan broj k takav da je $nr < k < (n+1)r$, odnosno $n < \dfrac{k}{r} < n+1$.

Promotrimo niz $\left(\dfrac{n}{r} \pmod M\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Malom modifikacijom Kroneckerovog teorema slijedi da je taj niz gust modulo M. Prema tome, znamo da postoji prirodni broj k takav da je

$m < \frac{k}{r} \pmod{M} < m+1$, odnosno $Ms + m < \frac{k}{r} < Ms + m + 1$ za neki prirodan broj s. Stavljanjem $n = Ms + m$ vidimo da je to traženi n. $\square$

2 Weylov teorem o ekvidistirbuciji

Teorem 2 (Weyl)**.** *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz brojeva iz intervala $[0,1]$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) Za sve realne brojeve $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \leq n \,:\, a \leq a_i \leq b\}}{n} = b - a.$$

(ii) Za svaku neprekidnu funkciju $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

(iii) Za svaki prirodan broj r,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i r a_k} = 0.$$

Definicija 1. Za niz brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $[0,1]$ kažemo da je **ekvidistribuiran** ako vrijedi neka od tvrdnji (i) - (iii).

Definicija 2. Za niz realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je **uniformno distribuiran modulo** 1 ako je niz $(\{a_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ evkidistribuiran.

Primjer 4. Neka je a iracionalan broj. Dokažite da je tada niz $(na)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno distribuiran modulo 1.

Rješenje. Dokažimo da za niz $(\{na\})_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi uvjet (iii) iz Weylovog teorema. Neka je r prirodan broj. Redom računamo

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i r\{ka\}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i k a} = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{2\pi i r(n+1)a} - e^{2\pi i r a}}{e^{2\pi i r a} - 1}.$$

Uočimo da je

$$\left| \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{2\pi i r(n+1)a} - e^{2\pi i r a}}{e^{2\pi i r a} - 1} \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{|e^{2\pi i r a} - 1|}$$

iz čega slijedi da početna sumo konvergira k 0 kada $n \to \infty$. $\square$

Teorem 3 (Van der Corput). *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da je niz $(x_{n+p} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno distribuiran modulo 1 za svaki prirodan broj p. Tada je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ također uniformno distribuiran modulo 1.*

Za dokaz teorema ćemo trebati sljedeću lemu.

Lema 4. *Za sve kompleksne brojeve $z_1, z_2, \ldots, z_n$ i za sve prirodne brojeve $h \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi sljedeća nejednakost (uz dogovor da je $z_i = 0$ za sve $i \neq 1, 2, \ldots, n$)*

$$h^2 \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 \leq (n + h - 1) \left[2 \sum_{r=1}^{h-1} \mathrm{Re} \left(\sum_{i=1}^{n-r} z_{i+r}\overline{z_i}\right) + h \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right].$$

Dokaz teorema 3. Želimo pokazati da za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava uvjet (iii) iz Weylovog teorema. Fiksirajmo prirodan broj r. Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Stavimo $z_j = e^{2\pi i r x_j}$ i neka je $h = h(\varepsilon)$ prirodni broj kojeg ćemo kasnije definirati.

Primjenom Leme 4 na gornje $z_1, z_2, \ldots, z_n$ i h slijedi

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^2 \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n + h - 1}{h^2} \left[2 \sum_{i=1}^{h-1} (h - i)\, \mathrm{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-i} z_{i+j}\overline{z_i}\right) + nh\right].$$

Ocjenimo sada realni dio koji se javlja u gornjoj sumi

$$\mathrm{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-i} z_{i+j}\overline{z_j}\right) = \mathrm{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-i} e^{2\pi i r(x_{i+j} - x_j)}\right) \leq \left|\sum_{j=1}^{n-i} e^{2\pi i r(x_{i+j} - x_j)}\right|.$$

Iz pretpostavke teorema znamo da je niz $(x_{n+i} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno distribuiran modulo 1. Primjenom Weylovog teorema znamo da je tada $\left|\sum_{j=1}^{n-i} e^{2\pi i r(x_{i+j} - x_j)}\right| \leq n\varepsilon$ za sve dovoljno velike n.

Uvrštavanjem gornje ocijene konačno dobivamo

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^2 \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n + h - 1}{h^2} \left[2n\varepsilon \sum_{i=1}^{h-1} (h - i) + nh\right] \leq \frac{n + h - 1}{nh}(1 + h\varepsilon) \leq \frac{2(1 + h\varepsilon)}{h} \leq 3\varepsilon$$

za sve dovoljno velike n, pri čemu prirodan broj h odaberemo tako da vrijedi $h \geq \dfrac{2}{\varepsilon}$. $\square$

Primjer 5. Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ nekonstantan polinom s iracionalnim vodećim koeficijentom. Dokažite da je tada niz $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno distribuiran modulo 1.

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po stupnju polinoma f. Baza indukcije, tj. slučaj $\deg(f) = 1$ se lagano provjeri tako da se pokaže svojstvo (iii) iz Weylovog teorema (slično kao u Primjeru 4).

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve nekonstantne polinome s iracionalnim vodećim koeficijentom i stupnja manjeg od $d = \deg(f)$. Da bi dokazali da je niz $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno distribuiran modulo 1 prema Van der Corputovom teoremu nam je dovoljno dokazati da je niz $(f(n+p)-f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno distribuiran modulo 1 za svaki prirodan broj p. Međutim, to diretktno slijedi iz pretpostavke indukcije jer je polinom $f(n+p)-f(n)$ stupnja $(d-1)$ i također ima iracionalan vodeći koeficijent. $\square$

Primjer 6. Neka je α iracionalan broj i $P \in \mathbb{Z}[x]$ nekonstantan polinom. Dokažite da jednadžba $P(m) = \lfloor \alpha n \rfloor$ ima beskonačno mnogo cijelobrojnih rješenja.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha > 0$ i da je vodeći koeficijent od P pozitivan (u suprotnome samo zamijenimo n s $-n$). Promotrimo sljedeće slučajeve:

1° $\alpha < 1$

Tada je duljina intervala $\left\langle \frac{P(m)}{\alpha}, \frac{P(m)+1}{\alpha} \right\rangle$ veća od 1 pa znamo da postoji cijeli broj n takav da je $\frac{P(m)}{\alpha} < n < \frac{P(m)+1}{\alpha}$. Prema tome imamo da je $P(m) = \lfloor \alpha n \rfloor$. Kako je m bio proizvoljan prirodan broj, ovime dobivamo beskonačno mnogo cijelobrojnih rješenja početne jednadžbe.

2° $\alpha > 1$

Pretpostaviom suprotno, tj. da početna jednadžba ima konačno mnogo cijelobrojnih rješenja. To znači da postoji prirodan broj M takav da za sve prirodne brojeve $m > M$ vrijedi $P(m) \notin A = \{\lfloor \alpha n \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$.

Neka je β realan broj tako da vrijedi $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ i $B = \{\lfloor \beta n \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$. Prema poznatom Beattyevom teoremu o particiji znamo da skupovi A i B čine particiju skupa $\mathbb{N}$. Iz gornjeg sada slijedi da je $P(m) \in B$ za sve prirodne brojeve $m > M$.

Prema tome, znamo da postoji niz prirodnih brojeva $(n_m)_{m>M}$ za koje vrijedi $P(m) = \lfloor \beta n_m \rfloor$. Iz ovog slijedi da je $n_m - 1 + 1 - \frac{1}{\beta} < \frac{P(m)}{\beta} < n_m$, tj. $\left\{ \frac{P(m)}{\beta} \right\} \in \left\langle 1 - \frac{1}{\beta}, 1 \right\rangle$ za sve prirodne brojeve $m > M$.

Nadalje, kako je α iracionalan tada je i β također iracionalan pa polinom $\frac{1}{\beta}P$ zadovoljava uvjete prethodnog primjera. Time imamo da je niz $\left(\frac{P(m)}{\beta}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ uniformno distribuiran modulo 1. Međutim, to daje kontradikciju s činjenicom da je $\left\{ \frac{P(m)}{\beta} \right\} \in \left\langle 1 - \frac{1}{\beta}, 1 \right\rangle$ za sve prirodne brojeve $m > M$. Dakle, početna pretpostavka je bila pogrešna, odnosno jednadžba ima beskonačno mnogo cijelobrojnih rješenja.

$\square$

3 Zadaci za domaću zadaću

Za uspješno polaganje zadaće potrebno je riješiti barem 4 od sljedećih 8 zadataka.
Rok predaje je 14. 7. 2024.

Zadatak 1. Dokažite Lemu 4.

Uputa: Zapišite sumu $h\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}$ i primijenite CSB.

Zadatak 2. Ispitajte konvergenciju niza $(\sin(n^2)+\sin(n^3))_{n\in\mathbb{N}}$.

Zadatak 3. Dokažite da postoji prirodan broj n za koji broj 2^n počinje s 2024. Kolika je gustoća tih brojeva?

Zadatak 4. Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ proizvoljni kompleksni brojevi. Dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva k takvih da vrijedi

$$\varepsilon + \sqrt[k]{\left|z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k\right|} > \max\left\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|\right\}.$$

Zadatak 5. Žaba se kreće po pozitivnom dijelu realne osi počevši od ishodišta i pritom može napraviti samo skokove za udaljenost $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2024}$. Dokažite da postoji prirodan broj n_0 takav da žaba može doskakati u svaki od intervala $[n, n+1]$ za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$.

Zadatak 6. Neka je n prirodan broj, $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \pi$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i \cos(ka_i)\right| < \frac{1}{k}$$

za sve prirodne brojeve k. Dokažite da je tada $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Zadatak 7. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz brojeva u $[0,1\rangle$ takav da mu je barem jedno gomoilište iracionalno. Za brojeve $0 \leq a < b \leq 1$ neka je $N_n(a,b)$ broj n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{\pm 1\}^n$ takvih da je $\{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n\} \in [a, b\rangle$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(a,b)}{2^n} = b - a.$$

Zadatak 8. Neka je x realan broj. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(a) Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $|a_n - n| \leq \varepsilon$ za svaki prirodan broj n i takav da je niz $(xa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno distribuiran modulo 1.

(b) x je transcendentalan.