

Parcijalne diferencijalne jednačbe 1

Popravni kolokvij 25.2.2022.

1. (5) Neka je $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^2 za koju vrijedi $-\Delta u < 0$. Može li slika od u biti otvoreni interval? Može li slika od u biti segment? Svoje odgovore obrazložite.

2. (4+5=9 bodova)

a) Odredite rješenje zadaje

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_1, x_2, 0) = e^{-\frac{1}{2}x_1} \sin x_2, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

b) Izvedite formulu za rješenje zadaje

$$\begin{cases} u_t - c^2 \Delta u - b \cdot \nabla u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

pri čemu je $c > 0$, $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ i $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

3. (4+5=9 bodova)

a) Odredite rješenje zadaje

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^x, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

b) Zadane su funkcije $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ te $f_2, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Pretpostavimo dodatno da su f_2, g i h harmoničke. Izvedite formulu

$$u(x, t) = g(x) + th(x) + f_2(x) \int_0^t (t-s)f_1(s)ds$$

za rješenje zadaje

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f_1(t)f_2(x), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x, 0) = h(x), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$