

# Prva zadaća

Rok predaje: 8.5.2023.

1. Definiramo preslikavanje na prostoru  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  s

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (\varphi(1/n) - \varphi(-1/n)).$$

- (a) Dokažite da je  $T$  distribucija reda 1.
- (b) Pokažite da je  $\text{supp } T = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ .

2. Definiramo preslikavanje  $Pf_{\frac{1}{x^2}} : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$\langle Pf_{\frac{1}{x^2}}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right].$$

- a) Dokažite da je  $Pf_{\frac{1}{x^2}}$  dobro definirano preslikavanje.
- b) Dokažite da je distribucija reda 2.
- c) Dokažite da vrijedi  $(p.v. \frac{1}{x})' = -Pf_{\frac{1}{x^2}}$ .

3. Odredite limese sljedećih nizova u  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :

- (a)  $A_n = \cos(n^2 x)$ ,
- (b)  $B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{1/n}$ .

4. Neka je  $T \in M_d(\mathbb{R})$  invertibilna matrica, te neka je  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Dokažite

$$\widehat{(f \circ T)} = |\det T|^{-1} \hat{f} \circ (T^*)^{-1}.$$

Posebno, Fourierova transformacija je invarijantna na rotacije, tj. ako je  $T$  ortogonalna matrica takva da je  $\det T = 1$ , vrijedi  $\widehat{f \circ T} = \hat{f} \circ T$ .

5. Neka je  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\varphi \neq 0$ . Dokažite da ne postoji otvoreni interval  $I \in \mathbb{R}$  takav da je  $\hat{\varphi}|_I \equiv 0$ .