Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

Pismeni ispit 1.7.2024.

1. (6 bodova) Dan je linearni funkcional $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ s
$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{x^2} \varphi'(x) dx.$$
Odredite je li $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, odnosno $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ te u slučaju potvrdnog odgovora na prvo pitanje odredite njen red.

2. (8 bodova) Dokažite sljedeće tvrdnje ili ih opovrgnite kontraprimjerom (podrazumijeva se da su f, g funkcije):
   (a) $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies fg \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$
   (b) $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} f$, $g_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} g \implies f_n g_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} fg$
   (c) $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} f \implies f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} f$

3. (4 boda) Izračunajte integral
$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx.$$

4. (6 bodova)
   (a) Pokažite da je $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, gdje je
$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2 x^2 + 6\pi i x - 2}$$
   te odredite njenu Fourierovu transformaciju.
   (b) Odredite jedno rješenje
$$u'' + 3u' + 2 = \delta_0.$$

5. (4 boda) Neka je $f \in H^{-1}(\Omega)$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ograničen otvoren skup. Dokažite da postoje $f_0, f_1, \ldots, f_d \in L^2(\Omega)$ takve da je
$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega f_0 v + \sum_{j=1}^d f_j \partial_j v, \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$