Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

Pismeni ispit 17.6.2024.

1. (5 bodova) Neka je T linearan funkcional na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definiran s

$$\langle T, \varphi\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} (x-2024)^{2024} \operatorname{arctg}(x)\varphi'(x)dx.$$

   Pokažite da je T distribucija. Je li T definiran na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ na isti način temperirana distribucija?

2. (6 bodova) Neka je $f_n \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ takav da vrijedi $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom:

   (a) $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$,

   (b) $f_n \xrightarrow{H^1} 0$.

3. (4 boda) Odredite Fourierovu transformaciju funkcije

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\pi(x-y)^2-2y}dy.$$

   Uputa: Zapišite f u prigodnijem obliku.

4. (6 bodova)

   (a) Za zadani $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$, odredite Fourierovu transformaciju funkcije $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$f(x) = e^{2\pi i\mathbf{c}\cdot\xi},$$

   (b) Koristeći Fourierovu transformaciju izvedite formulu za rješenje transportne zadaće na $\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{c}\cdot\nabla u + u = 0, \\ u(\cdot,0) = u_0, \end{cases}$$

   gdje su $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ i $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ zadani.

5. (5 bodova) Neka je $f \in H^1(\mathbb{R})$ zadana, te $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da je $0 \le \vartheta \le 1$ i $\vartheta|_{[-1,1]} \equiv 1$. Pokažite da za niz f_n definiran s $f_n(x) = \vartheta\left(\frac{x}{n}\right) f(x)$ vrijedi

$$f_n \xrightarrow{H^1} f.$$

Napomena: U zadacima podrazumijevamo da je definicija H^1 prostora ona koja koristi distribucijske derivacije.