Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1

Treći ispitni rok 30.8.2024.

1. (5 bodova) Metodom karakteristika riješite zadaću

$$\begin{cases} xu_x + u_y = 3x - u, \\ u(x,0) = 1. \end{cases}$$

2. (7 bodova) Neka je $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ klase C^2 takva da je $\Delta u > 0$. Može li slika od u biti
   (a) otvoren skup?
   (b) zatvoren skup?
   (c) kompaktan skup?

3. (5 bodova) Izvedite formulu za rješenje zadaće

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(-x,x) = 0, \\ u(x,x) = x \cdot \chi_{[0,1]}(x) \end{cases}$$

   na skupu $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 > 0,\ x_1 - x_2 < 0\}$.

4. (6 bodova)
   (a) Izračunajte Δf, gdje je $f(x_1, \dots, x_d) = \cos\left(\sum_{j=1}^d \alpha_j x_j\right)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$.
   (b) Odredite rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}_+ \\ u(x_1, \dots, x_4, 0) = \cos\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{4} \sqrt{j} \cdot x_j\right) \end{cases}$$

   Napomena: Koristite (a) dio zadatka kako biste pogodili oblik rješenja.

5. (5 bodova) Pretpostavimo da je $u \in C_c^2(\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \operatorname{div}\left(a(x)\nabla_x u(x,t)\right) = 0, \\ u(x,0) = g(x), \\ u_t(x,0) = h(x), \end{cases}$$

   gdje su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ te $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Definiramo energiju $E : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ s

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_t|^2 + a|\nabla u|^2 dx.$$

   (a) Pokažite da je E konstantna funkcija.
   (b) Ako je $a \equiv 1$ te $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 2$, odredite tu konstantu.