Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1
Drugi ispitni rok 19.2.2025.

Napomene:

- Smijete koristiti sve tvrdnje s predavanja i vježbi, kao i one iz prve zadaće, ali precizno navedite na što se pozivate.
- Ukupan broj bodova je 24 (za prolaz je potrebno 12).
- Rezultati će biti danas do kraja dana, a uvidi u petak u 12h u uredu 217.

1. (6 bodova) Dana je zadaća
$$\begin{cases} xu_x + yu_y = -4xyu \\ u|_S = u_0, \end{cases}$$
gdje su
   (a) S x–os i $u_0(x,y) = e^{-x^2}$.
   (b) S pravac $y = 1$ i $u_0(x,y) = e^{-x^2}$.

   Ukoliko je moguće, pronađite jedno C^1 rješenje dane zadaće te navedite najveći povezan skup koji sadrži S na kojem je dobiveno rješenje definirano. U suprotnom pokažite da takvo ne postoji.

2. Neka je $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, |x| < 1\}$ (za oba podzadatka).
   (a) (5 bodova) Neka je u rješenje rubne zadaće
$$\begin{cases} \Delta\left(u - e^{|x|^2}\right) = 0, & \text{na } \Omega \\ u(x) = \prod_{j=1}^{d} x_j, & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$
   Odredite maksimum funkcije u na $\overline{\Omega}$.
   (b) (4 boda) Neka je $d \geqslant 3$ te u rješenje zadaće
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{na } \Omega \\ u = g, & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$
   gdje su f, g zadane glatke funkcije. Pokažite da je
$$u(0) = \fint_{\partial\Omega} g(y)\,d\sigma(y) + \frac{1}{d(d-2)} \fint_{\Omega} \left(\frac{1}{|y|^{d-2}} - 1\right) f(y)\,dy.$$

3. (5 bodova) Riješite početnu zadaću
$$\begin{cases} u_t - 4\Delta u + 4u_{x_1} - 4u_{x_3} = 0 & \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = e^{\frac{1}{2}(x_1+2x_2+3x_3)} & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\}. \end{cases}$$
   Hint: Uočite svojstvo zadanog početnog uvjeta da biste pretpostavili oblik rješenja.

4. (4 boda) Neka je u (jedinstveno) rješenje početne zadaće
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 2t & \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\}, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\}. \end{cases}$$
   Izračunajte $u(\underbrace{0,0,0}_{x}, \underbrace{2025}_{t})$.

Skica rješenja

1. (a) U ovom slučaju imamo da je $S = \gamma(\mathbb{R})$ gdje je $\gamma(s) = (s,0)$ uz $u_0(s) = e^{-s^2}$. Kako je za sve $s \in \mathbb{R}$
$$a(\gamma(s), u_0(s)) \cdot n(s) = (s,0) \cdot (0,1) = 0,$$
vidio da je cijela krivulja karakteristična. Ukoliko promotrimo pripadnu matricu
$$M(s) = \begin{bmatrix} a & b \\ \gamma' & u_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & e^{-s^2} \\ 1 & 0 & -2se^{-s^2} \end{bmatrix},$$
vidimo da je $r(M(s)) = 1$ jedino za $s = 0$. Stoga nemamo C^1 rješenje na bilo kakvoj okolini od S u ovom slučaju.

   (b) U ovom slučaju je $\gamma(s) = (s,1)$ te $u_0(s) = e^{-s^2}$, pa vidimo da je
$$a(\gamma(s), u_0(s)) \cdot n(s) = (s,1) \cdot (0,1) = 1$$
za sve $s \in \mathbb{R}$. Dakle, nema karakterističnih točaka, te ćemo imati rješenje na nekoj okolini od S. Pripadni karakteristični sustav je
$$\begin{cases} x'(t;s) = x \\ y'(t;s) = y \\ z'(t;s) = -4xyz \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0;s) = s \\ y(0;s) = 1 \\ z(0;s) = e^{-s^2}, \end{cases}$$
odakle slijedi
$$x(t,s) = se^t, \qquad y(t,s) = e^t, \qquad z(t,s) = e^{-s^2 + 2s\left(1 - e^{2t}\right)}.$$
Sada za $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (ujedno i tražena domena) imamo $t(x,y) = \ln y$ i $s(x,y) = \frac{x}{y}$, pa slijedi
$$u(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{x}{y}(1 - y^2)\right).$$

2. (a) Kako je
$$\Delta u = \Delta e^{|x|^2} = 2de^{|x|^2} + 4|x|^2 e^{|x|^2} > 0,$$
vidimo da je u subharmonička funkcija, pa ona postiže svoj maksimum na rubu. Tamo je pak
$$u(x) = \prod_{j=1}^{d} x_j \overset{\text{A-G}}{\leqslant} \left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{\frac{d}{2}} = d^{-\frac{d}{2}},$$
te se jednakost postiže npr. za $x = \frac{1}{\sqrt{d}}(1, \ldots, 1)$.

   (b) Ključan dio je opravdati, odnosno odrediti vrijednost $G(0,y)$, s obzirom da u samoj definiciji korektora imamo sfernu inverziju koja nije definirana za 0. Ovdje je moguće odrediti taj izraz ili istim argumentom kao u skripti za vježbe (napravljeno za općeniti R), ili trikom sa simetrijom Greenove funkcije; $G(0,y) = G(y,0)$, pa problema s inverzijom više nema. Ostatak je konkretno računanje normalne derivacije od G na rubu sfere te uvrštavanje u formulu (rješenja bez itijednog od gore navedenih koraka nisu nosila nikakve bodove).

3. Kako za funkcije oblika $g(x) = e^{a\cdot x}$, gdje je $a \in \mathbb{R}^3$ imamo $\partial_j g = a_i g$, vidimo da je dani početni uvjet svojstveni vektor za sve parcijalne derivacije (pa posebno zbog linearnosti i Laplacea). Stoga je ponovno prirodno potražiti rješenje u obliku $u(x,t) = h(t)g(x)$; tada uvrštavanjem u jednadžbu (uz $a = \frac{1}{2}(1,2,3)$) imamo

$$u_t - 4\Delta u + 4u_{x_1} - 4u_{x_3} = (h'(t) - (4|a|^2 + 4a_1 - 4a_3)h(t))g(x) = (h'(t) - 18h(t))g(x),$$

odakle zbog $g > 0$ vidimo da je dovoljno da h rješava gornji ODJ, uz početni uvjet $h(0) = 1$. Stoga je rješenje dano s

$$u(x,t) = e^{18t + \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 3x_3)}.$$

Alternativno, možemo uvesti pomoćnu funkciju oblika

$$v(x,t) = e^{\alpha\cdot x + \beta t}$$

za neke $\alpha \in \mathbb{R}^d$ i $\beta \in \mathbb{R}$, te koeficijente namjestiti tako da v zadovoljava $v_t - 4\Delta v = 0$, uz novi početni uvjet $v(x,0) = e^{(\alpha + \frac{1}{2}(1,2,3))\cdot x}$, te onda riješiti direktno traženi problem koristeći formulu i konačno se vratiti u supstituciji.

4. Za homogeni dio jednadžbe iz Kirchhoffove formule imamo

$$u(0,t) = \fint_{S(0,t)} t|y|^2 + |y|^2 + 2y\cdot y \, d\sigma(y) = t^3 + 3t^2.$$

Za nehomogeni dio promotrimo prvo pomoćnu zadaću

$$\begin{cases} v(\cdot,\cdot;s) - \Delta v(\cdot,\cdot;s) = 0, \\ v(\cdot,0;s) = 0, \\ v_t(\cdot,0;s) = 2s, \end{cases}$$

čije je rješenje iz Kirchhoffove formule

$$v(0,t;s) = \fint_{K(0,t)} 2st = 2st.$$

Prema Duhamelovom principu rješenje nehomogenog dijela zadaće je dano s

$$\int_0^t v(0,t-s;s)ds = \int_0^t 2s(t-s)ds = \frac{1}{3}t^3.$$

Ukupno rješenje je tada

$$u(0,2025) = \frac{4}{3}\cdot 2025^3 + 3\cdot 2025^2.$$