Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1

Prvi ispitni rok 5.2.2025.

1. (8 bodova) Dana je zadaća

$$\begin{cases} u_x + 2u_y = 2xu, \\ u|_S = u_0. \end{cases}$$

   Pronađite (jedno) C^1 rješenje zadaće, odnosno argumentirajte nepostojanje takvog, ako je

   (a) S x–os i $u_0(x,y) = x^2$.

   (b) S pravac $y = 2x$ i $u_0(x,y) = e^{x^2}$.

   (c) S pravac $y = 2x$ i $u_0(x,y) = 1$.

2. (a) (4 boda) Označimo s $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Neka je $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ rješenje rubne zadaće

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{na } \Omega \\ u(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 + 2, & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

   Odredite maksimum funkcije u na $\overline{\Omega}$ te sve točke u kojima se taj maksimum postiže.

   (b) (5 bodova) Neka je $A \in M_d(\mathbb{R})$ takva da za svaku harmoničku funkciju $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\Delta(u \circ A) = 0$. Pokažite da je A oblika λO za neki $\lambda \in \mathbb{R}$ i O ortogonalnu matricu.

3. (a) (3 boda) Riješite početnu zadaću

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

   (b) (4 boda) Izvedite formulu za rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_t - c^2\Delta u + b \cdot \nabla u = 0 & \text{na } \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = g & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

   gdje je $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ i $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

4. (4 boda) Riješite početnu zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = e^t & \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x_1,x_2,x_3,0) = x_1^2 - x_2^2 & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x_1,x_2,x_3,0) = 0 & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Napomena: Smijete koristiti sve tvrdnje s predavanja i vježbi, kao i one iz prve zadaće, ali precizno navedite na što se pozivate.

Skica rješenja

1. (a) U ovom slučaju imamo da je $S = \gamma(\mathbb{R})$ gdje je $\gamma(s) = (s, 0)$ uz $u_0(s) = s^2$, te je za svaki $s \in \mathbb{R}$

$$a(\gamma(s), u_0(s)) \cdot n(s) = (1, 2) \cdot (0, 1) = 2 \neq 0.$$

Pripadni karakteristični sustav je

$$\begin{cases} x'(t;s) = 1 \\ y'(t;s) = 2 \\ z'(t;s) = 2xz \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0;s) = s \\ y(0;s) = 0 \\ z(0;s) = s^2, \end{cases}$$

odakle slijedi

$$x(t,s) = t + s, \qquad y(t,s) = 2t, \qquad z(t,s) = s^2 e^{t(t+2s)}.$$

Konačno iz $t(x,y) = \frac{y}{2}$ i $s(x,y) = x - \frac{y}{2}$ dobivamo

$$u(x,y) = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 e^{\frac{y}{2}\left(x - \frac{y}{2}\right)}.$$

(b) U ovom slučaju je $\gamma(s) = (s, 2s)$ te $u_0(s) = e^{s^2}$, pa vidimo da je

$$a(\gamma(s), u_0(s)) \cdot n(s) = (1, 2) \cdot (-2, 1) = 0$$

za sve $s \in \mathbb{R}$. Dakle, cijela krivulja je karakteristična. Pripadna matrica

$$M(s) = \begin{bmatrix} a & b \\ \gamma' & u_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2se^{s^2} \\ 1 & 2 & 2se^{s^2} \end{bmatrix}$$

je ranga 1 za sve s, pa je moguće pronaći beskonačno rješenja dane zadaće. Jedno takvo je upravo funkcija $u(x,y) = e^{x^2}$ (može se dobiti i načinom opisanim u vježbama, davanjem druge krivulje koja nije karakteristična i siječe zadanu u barem jednoj točki s kompatibilnim uvjetima).

(c) U ovom slučaju imamo ponovno da je cijela krivulja S karakteristična, međutim matrica $M(s)$ će biti ranga 2 za sve $s \neq 0$, stoga nije zadovoljen nužan uvjet za egzistenciju C^1 rješenja dane zadaće.

2. (a) S obzirom da je u harmonička funkcija, ona postiže svoj maksimum na rubu. Također, kako je Ω povezan, te u očito nije konstanta zbog toga kako je zadana već na rubu, slijedi da su jedine točke u kojima može postići maksimum upravo one na rubu. Tamo se lako dobije da je maksimum jednak $\frac{11}{2}$ te se postiže u točkama $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(b) Kao što je izračunato u zadatku s vježbi, za matricu A imamo da je

$$0 = \Delta(u \circ A) = D^2 u \cdot \left(A^T A\right).$$

Testiranjem ove relacije na harmoničkim funkcijama oblika $x_i x_j$ dobijemo da je matrica $A^T A$ dijagonalna, a onda i testiranjem na harmoničkim funkcijama oblika $x_i^2 - x_j^2$ i da je skalarna, što je tražena tvrdnja.

3. (a) Kao što je izvedeno u komentarima nakon zadatka 6.1.3. u vježbama, rješenje dane zadaće je dano s $u(x_1, x_2, x_3, t) = e^{-14t} \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

(b) Uvedemo pomoćnu funkciju oblika

$$v(x,t) = e^{\alpha \cdot x + \beta t}$$

za neke $\alpha \in \mathbb{R}^d$ i $\beta \in \mathbb{R}$. Te koeficijente namjestimo tako da v zadovoljava $v_t - c^2 \Delta v = 0$, uz novi početni uvjet $v(x,0) = e^{\alpha \cdot x} g$ te iskoristimo formulu za rješenje jednadžbe provođenja topline te se vratimo natrag u $u(x,t) = e^{-\alpha \cdot x - \beta t} u(x,t)$.

4. Kako je $x_1^2 - x_2^2$ harmonička funkcija, nalazimo se u uvjetima 4. zadatka iz zadaće, pa je rješenje jednostavnije za dobiti te glasi

$$u(x_1, x_2, t) = x_1^2 - x_2^2 + e^t - t - 1.$$