Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1

Prva zadaća

Napomena: Zadaću predajete mailom (može skenirano/slikano, samo da je čitljivo). Rok predaje je **7.2.** (zadnji dan prvog ispitnog roka).

1. Neka je u klase C^1 rješenje jednadžbe $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = -u$ u zatvorenom jediničnom krugu te neka je $a(x,y)x + b(x,y)y > 0$ na jediničnoj kružnici. Dokažite da je tada $u \equiv 0$.

   Napomena: Pokažite da je $0 \le \min u \le \max u \le 0$.

2. Neka je $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, te $f = (f_1, \dots, f_d) \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

   a) Pokažite sljedeći identitet

   $$\Delta(u \circ f) = (Df(Df)^T) : (D^2 u \circ f) + (Du \circ f) \cdot \Delta f,$$

   pri čemu je $\Delta f = (\Delta f_1, \dots, \Delta f_d)$, : označava standardni skalarni produkt matrica, a $\cdot$ standardni skalarni produkt vektora.

   b) Neka je sada $d = 2$ i u rješenje Laplaceove jednadžbe. Pretpostavimo da za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ postoje $\lambda(x) > 0$ i ortogonalna matrica s determinantom jednakom 1, $O(x)$, takvi da je $Df(x) = \lambda(x)O(x)$. Pokažite da je tada $\Delta(u \circ f) = 0$.

3. Pokažite da za $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ vrijedi

   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

   Uputa: Pokažite da funkcija

   $$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(tbx)dx$$

   zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

   $$I' = -\frac{b^2}{2a} tI.$$

4. Zadane su funkcije $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ te $f_2, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Pretpostavimo dodatno da su f_2, g i h harmoničke. Izvedite sljedeću formulu

   $$u(x,t) = g(x) + th(x) + f_2(x) \int_0^t (t-s) f_1(s) ds$$

   za rješenje zadaće

   $$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f_1(t) f_2(x), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g(x), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \\ u_t(x,0) = h(x), & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

5. Pokažite da postoji konstanta $C > 0$ za koju rješenje valne jednadžbe

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = g, \\ u_t(\cdot, 0) = h, \end{cases}$$

zadovoljava

$$(\forall t > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^3) \qquad |u(x,t)| \leq \frac{C}{t},$$

pri čemu su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.