# TRIKOVI IZ ANALIZE

Petar Orlić

17. ožujka 2023.

**Zadatak 1.** Izračunajte $\lim_n |\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})|$.

**Zadatak 2.** Izračunajte $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$.

**Propozicija 1.** *Ako je niz realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton i ograničen, tada je konvergentan.*

**Zadatak 3.** Izračunajte

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}.$$

**Zadatak 4.** Neka su $0 < a < b$ realni brojevi. Definirajmo nizove $(a_n)$ i $(b_n)$ formulama

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

pri čemu je $a_0 = a$, $b_0 = b$. Dokažite da su oba niza konvergentna te da su im limesi jednaki.

**Zadatak 5.** Ispitajte konvergenciju niza $(x_n)$ ako je $0 < x_1 < 2$ i $x_{n+1} = 1 + \sqrt{2x_n - x_n^2}$.

**Definicija 2.** *Kažemo da je niz realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev ako vrijedi*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m > n_0,\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

**Teorem 3.** *Niz realnih brojeva $(a_n)$ je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev.*

**Zadatak 6.** Dokažite da niz

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

konvergira.

Limes ovog niza je Euler-Maschetonijeva konstanta $\gamma \approx 0.5772$.

**Teorem 4** (Stolz-Cesáro)**.** *Neka su $(a_n)$ i $(b_n)$ nizovi realnih brojeva pri čemu je $b_n$ strogo rastuć i neograničen. Ako postoji limes*

$$\lim_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l,$$

*tada je i*

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l.$$

**Zadatak 7.** Izračunajte

$$\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right).$$

**Teorem 5** (l'Hospitalovo pravilo)**.** *Neka su funkcije $f$ i $g$ derivabilne na otvorenom intervalu $I$ osim možda u točki $c \in I$. Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ ili $\pm\infty$, te ako je $g' \neq 0$ na $I \setminus \{c\}$, tada je*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Zadatak 8.** Za proizvoljan $x_0 \in \langle 0, \pi \rangle$ definiramo niz $(x_n)$ rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = \sin(x_n), n \geq 0.$$

Izračunajte $\lim_n x_n$ i $\lim_n \sqrt{n} x_n$.

**Domaća zadaća**

*Treba točno riješiti barem 7 zadataka. Zadaće predajte do petka 31. ožujka 2023.*

1. Neka je $(a_n)$ niz pozitivnih realnih brojeva t.d. je $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0$. Dokažite da je $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = a$.

2. Niz realnih brojeva zadan je rekurzivno s
$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \arctan(x_n).$$
Dokažite da postoji i izračunajte $\lim_n nx_n^2$.

3. Niz realnih brojeva zadan je rekurzivno s
$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2023a_n^2 + a_n.$$
Izračunajte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

4. Dokažite da za svaki $\alpha > 1$ postoji niz realnih brojeva $(a_n)$ koji zadovoljava $a_1 = 1$, $a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n$ i
$$\lim_n \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = \alpha.$$

5. Neka je $(a_n)$ niz realnih brojeva t.d. $\frac{1}{2} < a_n < 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Definiramo niz $x_n$ rekurzivno s $X_0 = 0$,
$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n}.$$
Pokažite da je niz $(x_n)$ konvergentan i odredite mu limes.

6. Neka je $(a_n)$ niz pozitivnih realnih brojeva t.d. niz $\frac{1}{n}\sum_1^n a_i$ konvergira. Dokažite da tada niz $\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_1^n \frac{a_i}{\sqrt{i}}$ konvergira prema istom limesu.

7. Neka su $(a_{i,n})_{i,n\in\mathbb{N}}$ i $a$ realni brojevi t.d. je
$$\lim_n \max_{1\le i\le n} |a_{i,n}| = 0,\ \lim_n \sum_{i=1}^n |a_{i,n}| = a,\ \sup_n \sum_{i=1}^n |a_{i,n}| < \infty.$$
Dokažite da je $\lim_n \prod_{i=1}^n (1 + a_{i,n}) = e^a$. Vrijedi li nužno ista tvrdnja bez uvjeta $\sup_n \sum_{i=1}^n |a_{i,n}| < \infty$?

8. Izračunajte $\lim_n n\sin(n! \cdot 2\pi e)$.

9. Niz realnih brojeva rekurzivno je zadan s $x_1 = 1$ i $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$. Dokažite da red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira i odredite mu sumu.

10. Neka je $0 < x_0 < 1$ Niz $(x_n)$ je definiran rekurzivno formulom $x_{n+1} = x_n - x_n^2$. Izračunajte $\lim nx_n$.

11. Neka je $(x_n)$ niz svih prirodnih brojeva koji u svom decimalnom zapisu imaju bar jednu znamenku 9. Ispitajte konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$.

12. Postoje li padajući nizovi pozitivnih realnih brojeva $(a_n)$ i $(b_n)$ za koje vrijedi $\sum_n a_n = \sum n b_n = \infty$, ali $\sum_n \min\{a_n, b_n\} < \infty$?

13. Neka su $k$, $m$ prirodni brojevi te neka su $a_1, \ldots, a_k$ i $b_1, \ldots, b_m$ pozitivni realni brojevi t.d. za svaki $n \in N$ vrijedi

$$\sqrt[n]{a_1} + \ldots + \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{b_1} + \ldots + \sqrt[n]{b_m}.$$

Dokažite da je $k = m$ i $\prod_1^k a_i = \prod_1^m b_i$.

Uputa: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.