MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 1. rujna 2022.

Zadatak 1 (25 bodova)

a) (10 bodova) Odredite (ako postoje) infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{n}{2m^2n - 2n + m^2 - 1} : m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2 \right\}.$$

b) (10 bodova) Rekurzivno je zadan niz

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{16}a_n^2 + \frac{39}{16}, \quad n \geq 1.$$

Pokažite da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira te mu odredite limes.

c) (5 bodova) Odredite sva gomilišta niza

$$b_n = \frac{(2 + (-1)^n)^n + 2n}{3^{n(-1)^n} + n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 1. rujna 2022.

Zadatak 2 (25 bodova)

a) (7 bodova) Može li se funkcija $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana s

$$f(x,y) = \frac{x^2 y \sin(y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

proširiti do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^2$?

b) (6 bodova) Može li se funkcija iz a) proširiti do diferencijabilne funkcije na $\mathbb{R}^2$?

c) (5 bodova) Ispitajte povezanost i kompaktnost skupa A^C, pri čemu je

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje.

d) (7 bodova) Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadana s $f(x,y) = (x^3 + y^3, -xy)$. Odredite sve točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima f ima lokalni inverz, te u tim točkama odredite $(f^{-1})'(f(x,y))$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 1. rujna 2022.

Zadatak 3 (25 bodova)

a) (10 bodova) Definirajte pojam konvergentnog niza realnih brojeva. Dokažite da je svaki ograničen monoton niz u $\mathbb{R}$ konvergentan. Ako je niz konvergentan, mora li nužno biti ograničen? Ako je niz konvergentan, mora li nužno biti monoton? Svoje tvrdnje detaljno obrazložite (ako mora, dokažite, a ako ne mora, navedite konkretan primjer).

b) (10 bodova) Neka je (X, d) metrički prostor. Definirajte pojam otvorenog i pojam zatvorenog skupa u metričkom prostoru (X, d). Neka je $A \subset X$. Definirajte pojam gomilišta skupa A. Dokažite da je A zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.

c) (5 bodova) Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}^2$, gdje je $x_k = (\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)})$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Dokažite da je tada

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) \iff \lim_{k\to\infty} \alpha_k^{(1)} = \alpha^{(1)} \ \& \ \lim_{k\to\infty} \alpha_k^{(2)} = \alpha^{(2)}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 1. rujna 2022.

Zadatak 4 (25 bodova)

a) (9 bodova) Definirajte pojam uniformno neprekidne funkcije na metričkim prostorima. Navedite primjer funkcije koja je je neprekidna, a nije uniformno neprekidna (dokažite da nije uniformno neprekidna). Postoji li funkcija $f : [1, 2] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna, a nije uniformno neprekidna? Obrazložite odgovor.

b) (6 bodova) Definirajte pojam derivabilne funkcije u točki za funkcije više varijabli. Iskažite i dokažite Lagrangeov teorem srednje vrijednosti za funkcije više varijabli.

c) (4 bodova) Neka je $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ i $f : K \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Precizno definirate gornju i donju Darbouxovu sumu za neku subdiviziju P te gornji i donji Riemannov integral funkcije f.

d) (6 bodova) Za funkciju $f : [0, 2] \times [-2, 0] \to \mathbb{R}$ zadanu s

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \leq 1 \text{ i } y \geq -1 \\ 1, & \text{ako je } x \leq 1 \text{ i } y < -1 \\ 2, & \text{ako je } x > 1 \text{ i } y \geq -1 \\ 3, & \text{ako je } x > 1 \text{ i } y < -1 \end{cases}$$

Odredite gornji i donji Riemannov integral funkcije f. Je li f Riemann integrabilna? Odgovore detaljno obrazložite.