OSNOVE MATEMATIČKE ANALIZE

Drugi ispitni rok – 1. srpnja 2024.

Zadatak 1. (35 bodova)

a) (20 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ (-1)^m \frac{2n^2+2}{n^2+2n} \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Odgovor detaljno obrazložite.

b) (15 bodova) Dokažite da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin(n) + n}.$$

Obrazložite odgovor.

Rješenje.

a) Uočimo da je

$$(-1)^m \frac{2n^2+2}{n^2+2n} \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2n^2+2}{n^2+2n} \cdot (-1)^m \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right).$$

Uvedimo oznaku $a_n = \frac{2n^2+2}{n^2+2n}$. Ispitajmo monotonost niza (a_n). Vrijedi:

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} \le a_n \Leftrightarrow \frac{2(n+1)^2+2}{(n+1)^2+2(n+1)} \le \frac{2n^2+2}{n^2+2n} \quad / : 2 \\
& \Leftrightarrow \frac{n^2+2n+2}{n^2+4n+3} \le \frac{n^2+1}{n^2+2n} \\
& \Leftrightarrow (n^2+2n+2)(n^2+2n) \le (n^2+1)(n^2+4n+3) \\
& \Leftrightarrow n^4 + 2n^3 + 2n^3 + 4n^2 + 2n^2 + 4n \le n^4 + 4n^3 + 3n^2 + n^2 + 4n + 3 \\
& \Leftrightarrow 2n^2 \le 3 \\
& \Leftrightarrow |n| \le \sqrt{\frac{3}{2}} \\
& \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n \le 1
\end{aligned} \tag{1}$$

Dakle, vrijedi:

$$a_1 > a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < \dots, \tag{2}$$

gdje je a_2 najmanji član niza, odnosno niz je padajući do a_2, a nadalje je rastući. Stoga je

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = a_2 = \frac{2 \cdot 2^2 + 2}{2^2 + 4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Nadalje, pošto je niz a_n padajući do a_2, a nadalje je rastući i limes tog niza je 2, vrijedi

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \max\{a_1, 2\} = \max\left\{\frac{4}{3}, 2\right\} = 2.$$

Za drugi niz $b_m = (-1)^m \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)$ vrijedi

$$b_{4k} = \cos(2k\pi) = \cos 0 = 1,\ k \in \mathbb{N}$$
$$b_{2k-1} = -\cos\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0,\ k \in \mathbb{N}$$
$$b_{4k-2} = \cos(-\pi + 2k\pi) = -1,\ k \in \mathbb{N}$$

Stoga je

$$\inf\{b_m : m \in \mathbb{N}\} = \inf\{-1, 0, 1\} = -1, \quad \sup\{b_m : m \in \mathbb{N}\} = \sup\{-1, 0, 1\} = 1.$$

Koristeći formule

$$\sup(A \cdot B) = \max\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\},$$
$$\inf(A \cdot B) = \min\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\},$$

dobivamo

$$\sup S = 2, \quad \inf S = -2.$$

b) Za dokaz da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, vidite vježbe. Uočimo da je $\sin(n) \in [-1, 1]$ pa je

$$\sqrt[n]{n-1} \leq \sqrt[n]{\sin(n) + n} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}.$$

Nadalje, za $n > 1$ vrijedi

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n-1} \leq \sqrt[n]{\sin(n) + n} \leq \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$, iz teorema o sendviču slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin(n) + n} = 1.$$

Zadatak 2. (15 bodova) Zadan je skup

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| \leq 1,\ |y+1| \leq 2,\ (x-1)^2 + (y+1)^2 \geq 2\right\}$$

Je li skup S kompaktan? Je li povezan? Detaljno obrazložite svoje odgovore.

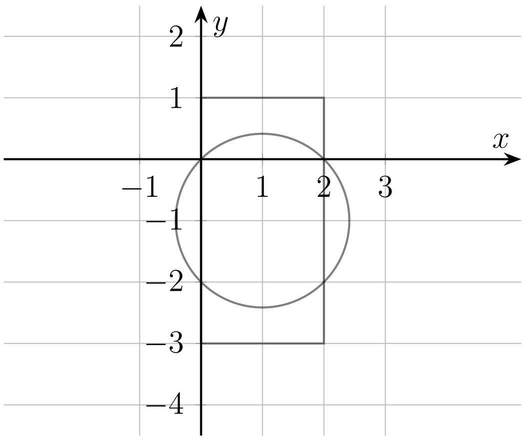
Rješenje. Prvo ćemo skicirati skup S. Uočimo da je uvjet $|x-1| \leq 1$ ekvivalentan s

$$-1 \leq x - 1 \leq 1,$$

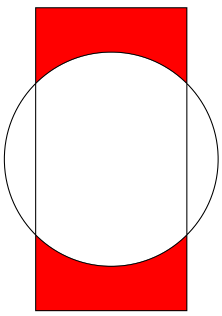
odnosno $x \in [0, 2]$, a uvjet $|y+1| \leq 2$ ekvivalentan s

$$-2 \leq y + 1 \leq 2$$

odnosno $y \in [-3, 1]$. Nadalje, jednadžba $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ predstavlja kružnicu sa središtem u $(1, -1)$, radijusa $\sqrt{2}$, a uvjet $(x-1)^2 + (y+1)^2 \geq 2$ predstavlja točke na kružnici i točke izvan kruga sa središtem u $(1, -1)$, radijusa $\sqrt{2}$.



Dakle, skup S izgleda ovako



i čini se sa slike da je nepovezan. Dokažimo da je uistinu nepovezan. Definirajmo otvorene skupove

$$U = \mathbb{R} \times \langle -1, +\infty \rangle,\ V = \mathbb{R} \times \langle -\infty, -1 \rangle.$$

Vrijedi:

i) $U \cap S \neq \emptyset$, $V \cap S \neq \emptyset$ (npr. $(0, 1) \in U \cap S, (0, -3) \in V \cap S$).

ii) $S \subseteq U \cup V$ (ovo je očito jer za $(x, y) \in S$ vrijedi $y \neq -1$).

iii) Kako je $U \cap V = \emptyset$, onda je i $U \cap V \cap S = \emptyset$.

Dakle, skup S je nepovezan. Dokažimo sada da je skup S kompaktan. Definirajmo funkcije $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s

$$p_1(x,y) = x,\ p_2(x,y) = y,\ f(x,y) = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 2.$$

Na predavanjima smo pokazali da su p_1 i p_2 neprekidne funkcije. Nadalje, vrijedi $f = (p_1-1)^2+(p_2+1)^2-2$ pa je i f neprekidna funkcija. Imamo

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p_1(x,y) \in [0,2],\ p_2(x,y) \in [-3,1],\ f(x,y) \in [0,+\infty\rangle\} \\ &= p_1^{-1}([0,2]) \cap p_2^{-1}([-3,1]) \cap f^{-1}([0,+\infty\rangle). \end{aligned}$$

Kako su funkcije p_1, p_2 i f neprekidne, a skupovi $[0,2], [-3,1], [0,+\infty\rangle$ zatvoreni skupovi, onda su i skupovi

$$p_1^{-1}([0,2]),\ p_2^{-1}([-3,1]),\ f^{-1}([0,+\infty\rangle$$

zatvoreni pa je i skup S zatvoren. Nadalje, skup S je i omeđen jer vrijedi

$$S \subseteq [0,2] \times [-3,1] \subseteq K((0,0),4).$$

Dakle, skup S je kompaktan skup.

Zadatak 3. (30 bodova)

a) (20 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ s

$$f(x,y) = \frac{x^3}{\ln(1+x^2+y^2)}.$$

Može li se funkcija f dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$? Ako je odgovor potvrdan, je li tako dobivena funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$? Obrazložite odgovor.

b) (5 bodova) Za gornju funkciju odredite $f'(1,1)(1,0)$.

c) (5 bodova) Odredite sve prirodne brojeve n za koje se funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x,y) = \frac{x^n}{\ln(1+x^2+y^2)}$$

može dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$. Obrazložite odgovor.

Rješenje.

a) Uočimo da je $f = \frac{p_1^3}{\ln(1+p_1^2+p_2^2)}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, gdje su $p_1(x,y) = x, p_2(x,y) = y$ projekcije na prvu, odnosno drugu varijablu. Kako su $p_1, p_2, \ln$ neprekidne funkcije, to je i f neprekidna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Znamo da vrijedi

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

Sada ćemo to iskoristiti da bismo izračunali $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Vrijedi

$$f(x,y) = \frac{x^3}{\ln(1+x^2+y^2)} = \frac{x^2+y^2}{\ln(1+x^2+y^2)} \frac{x^3}{x^2+y^2}.$$

Uočimo da je

$$0 \le \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| \le |x|.$$

Kako je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, to je i

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

pa je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\ln(1+x^2+y^2)} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Dodefiniramo li $f(0,0) = 0$, funkcija f će biti neprekidna u $(0,0)$. Provjerimo je li tako definirana funkcija diferencijabilna u $(0,0)$. Računamo parcijalne derivacije u $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{\ln(1+t^2)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Kandidat za diferencijal je linearni operator $T(h_1,h_2) = h_1$. Provjerimo vrijedi li

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - T(h_1,h_2)|}{||h||} = 0.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-T(h_1,h_2)|}{||h||} &= \frac{|\frac{h_1^3}{\ln(1+h_1^2+h_2^2)}-h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &= \frac{\left|\frac{h_1^2+h_2^2}{\ln(1+h_1^2+h_2^2)}\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2}-h_1\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &= \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left|\frac{h_1^2+h_2^2}{\ln(1+h_1^2+h_2^2)}\frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2}-1\right|.\end{aligned}$$

Stavimo li $h_1 = h_2 = h$, imamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{\sqrt{2h^2}}\left|\frac{2h^2}{\ln(1+2h^2)}\frac{h^2}{2h^2}-1\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left|1\cdot\frac{1}{2}-1\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Dakle, f nije diferencijabilna u $(0,0)$.

b) Vrijedi

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix}\frac{3x^2\ln(1+x^2+y^2)-x^3\frac{2x}{1+x^2+y^2}}{(\ln(1+x^2+y^2))^2} & \frac{-x^3\frac{2y}{1+x^2+y^2}}{(\ln(1+x^2+y^2))^2}\end{bmatrix},$$

što znači da je

$$f'(1,1) = \begin{bmatrix}\frac{3\ln 3-\frac{2}{3}}{(\ln 3)^2} & \frac{-\frac{2}{3}}{(\ln 3)^2}\end{bmatrix},$$

odakle slijedi

$$f'(1,1)(1,0) = \frac{3\ln 3-\frac{2}{3}}{(\ln 3)^2}.$$

c) Vrijedi

$$f(x,y) = \frac{x^n}{\ln(1+x^2+y^2)} = \frac{x^2+y^2}{\ln(1+x^2+y^2)}\frac{x^n}{x^2+y^2}.$$

Uočimo da je

$$0 \le \left|\frac{x^n}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x^{n-2}| \le |x^{n-2}|.$$

Za $n > 2$ je $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x^{n-2}| = 0$, to je za $n > 2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^n}{x^2+y^2} = 0$$

pa je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\ln(1+x^2+y^2)}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^n}{x^2+y^2} = 1\cdot 0 = 0$$

pa se za $n > 2$ funkcija f može dodefinirati do neprekidne funkcije u $(0,0)$ tako da stavimo $f(0,0) = 0$. Ako je $n = 2$, onda je

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = 1, \quad \lim_{t\to 0} f(0,t) = 0,$$

odakle zaključujemo da ne postoji $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ za $n = 2$ pa se funkcija f ne može dodefinirati do neprekidne funkcije u $(0,0)$ za $n = 2$. Ako je $n = 1$, onda je

$$\lim_{t\to 0^+} f(t,0) = +\infty$$

odakle zaključujemo da ne postoji $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ za $n = 1$ pa se funkcija f ne može dodefinirati do neprekidne funkcije u $(0,0)$ za $n = 1$.

Zadatak 4. (20 bodova)

a) (10 bodova) Neka je $(a_n)_n$ ograničen padajući niz u $\mathbb{R}$. Dokažite da je $(a_n)_n$ konvergentan niz.

b) (10 bodova) Iskažite i dokažite Rolleov teorem srednje vrijednosti.

Rješenje. Dokazano na predavanjima.