Osnove matematičke analize

2. kolokvij – 17. lipnja 2024.

1. (14 bodova) Zadan je skup

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1, xy > 0\right\}$$

Odredite ClA i dokažite da je to zatvarač skupa A. Je li skup A kompaktan? Je li povezan? Detaljno obrazložite svoje odgovore.

Rješenje: Tvrdimo da je $\mathrm{Cl}(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, xy \geq 0\right\}$. Definirajmo funkcije $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = |x|, \quad g(x, y) = |y|, \quad h(x, y) = xy.$$

Funkcija f je kompozicija funkcije $|\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i projekcije $p_1(x, y) = x$, funkcija g je kompozicija funkcije $|\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i projekcije $p_2(x, y) = y$, dok je $h = p_1 \cdot p_2$. Kako su p_1, p_2 i $|\,|$ neprekidne funkcije, to su i f, g, h neprekidne funkcije. Sada imamo

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, xy \geq 0\right\} = f^{-1}(\langle -\infty, 1]) \cap g^{-1}(\langle -\infty, 1]) \cap h^{-1}([0, +\infty\rangle).$$

Kako su f, g i h neprekidne funkcije, a $\langle -\infty, 1], [0, +\infty\rangle$ zatvoreni skupovi, to su i $f^{-1}(\langle -\infty, 1])$, $g^{-1}(\langle -\infty, 1])$ i $h^{-1}([0, +\infty\rangle)$ zatvoreni skupovi pa je i skup $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, xy \geq 0\right\}$ zatvoren, kao presjek tri zatvorena skupa. To je zatvoren skup koji sadrži skup A pa je po definiciji zatvarača

$$\mathrm{Cl}(A) \subseteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, xy \geq 0\right\}.$$

Kako je, po definiciji zatvarača $A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$, da bismo dokazali da je

$$\mathrm{Cl}(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, xy \geq 0\right\},$$

dovoljno je dokazati da su točke skupa $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, xy \geq 0\right\} \setminus A$, a to su točke

$$\begin{array}{lll} (1, y),\ y \in [0, 1], & (-1, y),\ y \in [-1, 0], & (0, y),\ y \in [-1, 1], \\ (x, 1),\ x \in [0, 1], & (x, -1),\ x \in [-1, 0], & (x, 0),\ x \in [-1, 1] \end{array}$$

u $\mathrm{Cl}(A)$. To ćemo dokazati tako da ćemo pronaći nizove u A koji konvergiraju danim točkama. Uočimo da vrijedi

$$\lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}, y\right) = (1, y), y \in \langle 0, 1\rangle$$
$$\lim_n \left(-1 + \frac{1}{n+1}, y\right) = (-1, y), y \in \langle -1, 0\rangle$$
$$\lim_n \left(\frac{1}{n+1}, y\right) = (0, y), y \in \langle 0, 1\rangle$$
$$\lim_n \left(-\frac{1}{n+1}, y\right) = (0, y), y \in \langle -1, 0\rangle$$

Nadalje, vrijedi

$$\lim_n \left(x, 1 - \frac{1}{n+1}\right) = (x, 1), x \in \langle 0, 1\rangle,$$
$$\lim_n \left(x, -1 + \frac{1}{n+1}\right) = (x, -1), x \in \langle -1, 0\rangle$$
$$\lim_n \left(x, \frac{1}{n+1}\right) = (x, 0), x \in \langle 0, 1\rangle$$
$$\lim_n \left(x, -\frac{1}{n+1}\right) = (x, 0), x \in \langle -1, 0\rangle$$

Uočimo da su gornji nizovi svi u A pa su točke

$$\begin{aligned}
&(1, y),\ y \in \langle 0, 1\rangle, \quad (-1, y),\ y \in \langle -1, 0\rangle, \quad (0, y),\ y \in \langle -1, 1\rangle \setminus \{0\},\\
&(x, 1),\ x \in \langle 0, 1\rangle, \quad (x, -1),\ x \in \langle -1, 0\rangle, \quad (x, 0),\ x \in \langle -1, 1\rangle \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

u $\mathrm{Cl}(A)$. Preostaje još dokazati da su točke

$$(1,0), (1,1), (0,1), (0,0), (-1,0), (-1,-1), (0,-1)$$

u $\mathrm{Cl}(A)$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) = (1,0), \quad \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}\right) = (1,1),\\
&\lim_n \left(\frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}\right) = (0,1), \quad \lim_n \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) = (0,0),\\
&\lim_n \left(-1 + \frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+1}\right) = (-1,0), \quad \lim_n \left(-1 + \frac{1}{n+1}, -1 + \frac{1}{n+1}\right) = (-1,-1)\\
&\lim_n \left(-\frac{1}{n+1}, -1 + \frac{1}{n+1}\right) = (0,-1).
\end{aligned}$$

Uočimo da su gornji nizovi svi u A pa su točke

$$(1,0),(1,1),(0,1),(0,0),(-1,0),(-1,-1),(0,-1)$$

u $\mathrm{Cl}(A)$. Dakle,

$$\mathrm{Cl}(A)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1, |y|\leq 1, xy\geq 0\right\}.$$

Kako je $A\neq \mathrm{Cl}(A)$, zaključujemo da A nije zatvoren skup, a onda nije ni kompaktan. Stavimo $U=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ i $V=\langle -1,0\rangle\times\langle -1,0\rangle$. Tada su U i V otvoreni skupovi i vrijedi

$$(i)\ U\cap A=U\neq\emptyset,\ V\cap A=V\neq\emptyset,$$
$$(ii)\ A\subseteq U\cup V,$$
$$(iii)\ U\cap V\cap A=\emptyset\cap A=\emptyset.$$

Dakle, skup A je nepovezan skup.

2. (9 bodova)

   a) (3 boda) Zadana je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, takva da je $f(\langle 0,+\infty\rangle)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>1\}$. Je li f neprekidna na $\mathbb{R}$? Obrazložite odgovor.

   b) (3 boda) Neka je $f:[-1,2]\times[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x+y)^3$. Je li f uniformno neprekidna funkcija? Obrazložite odgovor.

   c) (3 boda) Za funkciju $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ zadanu s $f(x,y)=(x+y,x^2y,x+y^2)$ odredite $f'(-1,1)(0,1)$.

Rješenje:

a) Skup $\langle 0,+\infty\rangle$ je povezan skup (dokazano na predavanjima). Dokažimo da je skup $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>1\}$ nepovezan skup. Stavimo $U=\langle 0,+\infty\rangle\times\langle 0,+\infty\rangle$ i $V=\langle -\infty,0\rangle\times\langle -\infty,0\rangle$. Tada su U i V otvoreni skupovi i vrijedi

$$(i)\, U\cap A\neq\emptyset,\ V\cap A\neq\emptyset,\text{(npr. }(2,2)\in U\cap A,(-2,-2)\in V\cap A)$$
$$(ii)\, A\subseteq U\cup V,$$
$$(iii)\, U\cap V\cap A=\emptyset\cap A=\emptyset.$$

Dakle, A je nepovezan skup. Pošto neprekidne funkcije preslikavaju povezane skupove u povezane, f nije neprekidna funkcija.

b) Definirajmo $p_1,p_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $p_1(x,y)=x, p_2(x,y)=y$. Na predavanjima smo dokazali da su p_1 i p_2 neprekidne funkcije pa je i $f=(p_1+p_2)^3$ neprekidna funkcija. Skup $K=[-1,2]\times[0,2]$ je zatvoren (jer je njegov komplement

$$(\langle -\infty,-1\rangle\times\mathbb{R})\cup(\langle 2,\infty\rangle\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\langle -\infty,0\rangle)\cup(\mathbb{R}\times\langle 2,\infty\rangle)$$

otvoren skup). Nadalje, $K\subset K(0,10)$ pa je K ne samo zatvoren, nego i omeđen skup, tj. kompaktan skup. Neprekidne funkcije na kompaktnom skupu su uniformno neprekidne pa je f uniformno neprekidna.

c) Vrijedi

$$f'(x,y)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2xy & x^2\\ 1 & 2y\end{bmatrix},$$

što znači da je

$$f'(-1,1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},$$

odakle slijedi

$$f'(-1,1)(0,1)=(1,1,2).$$

3. (14 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ s

$$f(x,y) = xy^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Može li se funkcija f dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$? Ako je odgovor potvrdan, je li tako dobivena funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$? Je li klase C^1?

Rješenje: Prvo provjerimo može li se funkcija f dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$. Definirajmo $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_1(x,y) = x, p_2(x,y) = y$. Na predavanjima smo dokazali da su p_1 i p_2 neprekidne funkcije pa je i $f = p_1 p_2^3 \sin \frac{1}{p_1^2+p_2^2}$ neprekidna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vrijedi

$$0 \le \left| xy^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right| \le |xy^3|.$$

Kako je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy^3| = 0$, po teoremu o sendviču slijedi da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| xy^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right| = 0,$$

a onda iz toga slijedi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Stavimo li $f(0,0) := 0$, funkcija f će biti neprekidna na $\mathbb{R}^2$. Na predavanjima smo dokazali da su p_1 i p_2 diferencijabilne funkcije pa je i $f = p_1 p_2^3 \sin \frac{1}{p_1^2+p_2^2}$ diferencijabilna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Provjerimo još je li diferencijabilna u $(0,0)$. Računamo parcijalne derivacije u $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Kandidat za diferencijal je nul-operator. Provjerimo vrijedi li

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathbf{0}(h_1,h_2)|}{||h||} = 0.$$

Vrijedi

$$0 \le \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathbf{0}(h_1,h_2)|}{||h||} = \frac{|h_1 h_2^3 \sin \frac{1}{h_1^2+h_2^2}|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{|h_1 h_2^3|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}|h_2^3| \le |h_2^3|.$$

Kako je $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_2^3| = 0$, po teoremu o sendviču slijedi da je

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathbf{0}(h_1,h_2)|}{||h||} = 0,$$

dakle, f je diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$. Računamo parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^3 \sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy^3\cos\frac{1}{x^2+y^2}\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3xy^2 \sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy^3\cos\frac{1}{x^2+y^2}\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Lako se, uz pomoć projekcija, vidi da su parcijalne derivacije neprekidne na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| y^3 \sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy^3\cos\frac{1}{x^2+y^2}\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq |y^3| + \left| \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right|\\
&= |y^3| + 2\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y^3| + 2|y|\\
0 &\leq \left| 3xy^2 \sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy^3\cos\frac{1}{x^2+y^2}\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \right|\\
&\leq |3xy^2| + \left| \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| = |3xy^2| + 2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2 |x| \leq |3xy^2| + |x|.
\end{aligned}$$

Kako je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y^3| + 2|y| = 0$ i $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |3xy^2| + |x| = 0$, po teoremu o sendviču zaključujemo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

dakle, parcijalne derivacije su neprekidne na $\mathbb{R}^2$, odnosno f je klase C^1 na $\mathbb{R}^2$.

4. (13 bodova)

   a) (4 boda) Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funkcija, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Precizno definirajte sljedeće pojmove: **limes** funkcije f u točki x_0, **neprekidnost** funkcije f u točki x_0, **diferencijabilnost** funkcije f u točki x_0 te **parcijalne derivacije** funkcija f_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ u točki x_0.

   b) (7 bodova) Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f : U \to \mathbb{R}^m$ derivabilna u $x_0 \in U$. Dokažite da tada funkcija f ima parcijalne derivacije $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$ u točki $x_0 \in U$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

   c) (2 boda) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna fukcija i $K \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan skup u $\mathbb{R}$. Mora li nužno $f^{-1}(K)$ biti kompaktan skup u $\mathbb{R}$? Ako je tvrdnja točna, dokažite je, a ako je netočna navedite kontraprimjer.

Rješenje:

a) i b) Vidjeti predavanja.

c) Stavimo npr. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada je f neprekidna funkcija, $K = \{0\}$ kompaktan skup (omeđen i zatvoren), a njegova praslika $f^{-1}(K) = \mathbb{R}$ nije omeđen skup pa nije ni kompaktan.

Osnove matematičke analize

2. kolokvij – 17. lipnja 2024.

1. (14 bodova) Zadan je skup

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 1, xy \le 0\right\}$$

   Odredite IntB i dokažite da je to interior skupa B. Je li skup B kompaktan? Je li povezan? Detaljno obrazložite svoje odgovore.

2. (9 bodova)

   a) (3 boda) Zadana je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, takva da je $g([0,1] \cup [2,3]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$. Je li g neprekidna na $\mathbb{R}$? Obrazložite odgovor.

   b) (3 boda) Neka je $g : [1,2] \times [-2,5] \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = xy^7$. Je li g uniformno neprekidna funkcija? Obrazložite odgovor.

   c) (3 boda) Za funkciju $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadanu s $g(x,y) = (x, y^2, x-y)$ odredite $g'(1,1)(1,0)$.

3. (14 bodova) Zadana je funkcija $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ s

$$g(x,y) = x^3 y \cos \frac{1}{x^2+y^2}.$$

   Može li se funkcija g dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$? Ako je odgovor potvrdan, je li tako dobivena funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$? Je li klase C^1?

4. (13 bodova)

   a) (4 boda) Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funkcija, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$. Precizno definirajte sljedeće pojmove: **limes** funkcije f u točki x_0, **neprekidnost** funkcije f u točki x_0, **diferencijabilnost** funkcije f u točki x_0 te **parcijalne derivacije** funkcija f_j, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ u točki x_0.

   b) (7 bodova) Neka su $(X,d), (Y,\rho)$ metrički prostori i $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Dokažite da je za svaki otvoreni skup $U \subseteq Y$ praslika $f^{-1}(U)$ otvoren skup u X.

   c) (2 boda) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna fukcija i $P \subseteq \mathbb{R}$ povezan skup u $\mathbb{R}$. Mora li nužno $f^{-1}(P)$ biti povezan skup u $\mathbb{R}$? Ako je tvrdnja točna, dokažite je, a ako je netočna navedite kontraprimjer.