OSNOVE MATEMATIČKE ANALIZE

Prvi ispitni rok – 17. lipnja 2024.

Zadatak 1. (35 bodova)

a) (20 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{-3 - 3m^2 + 2n + 2m^2 n}{m + 3m^2 + mn + 3m^2 n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Odgovor detaljno obrazložite.

b) (15 bodova) Zadan je niz realnih brojeva

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n}, n \in \mathbb{N}$$

Dokažite da je taj niz konvergentan i odredite mu limes.

Rješenje.

a) Uočimo da je

$$\frac{-3 - 3m^2 + 2n + 2m^2 n}{m + 3m^2 + mn + 3m^2 n} = \frac{m^2+1}{3m^2+m} \cdot \frac{2n-3}{n+1}.$$

Uvedimo oznaku $a_m = \frac{m^2+1}{3m^2+m}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
a_{m+1} < a_m &\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2+1}{3(m+1)^2+m+1} < \frac{m^2+1}{3m^2+m} \\
&\Leftrightarrow \frac{m^2+2m+2}{3m^2+7m+4} < \frac{m^2+1}{3m^2+m} \\
&\Leftrightarrow (m^2+2m+2)(3m^2+m) < (m^2+1)(3m^2+7m+4) \\
&\Leftrightarrow 3m^4+7m^3+8m^2+2m < 3m^4+7m^3+7m^2+7m+4 \\
&\Leftrightarrow m^2-5m-4 < 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Rješavanjem jednadžbe $x^2 - 5x - 4 = 0$ dobivamo rješenja $x_1 = \frac{5-\sqrt{41}}{2}$ i $x_2 = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$. Dakle, $m < x_2 \Leftrightarrow m < 6$ i $m > x_2 \Leftrightarrow m \geq 6$.

Dakle, vrijedi:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 < a_7 < a_8 < \dots, \tag{2}$$

gdje je a_6 najmanji član niza, odnosno niz je padajući do a_6, a nadalje je rastući. Stoga je

$$\inf\{a_m : m \in \mathbb{N}\} = a_6 = \frac{6^2+1}{3 \cdot 6^2 + 6} = \frac{37}{114}.$$

Nadalje, pošto je niz a_m padajući do a_6, a nadalje je rastući i limes tog niza je $\frac{1}{3}$, vrijedi

$$\sup\{a_m : m \in \mathbb{N}\} = \max\left\{a_1, \frac{1}{3}\right\} = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Za drugi niz, $b_n = \frac{2n-3}{n+1}$ se dokaže da je rastući niz i da je ograničen odozgo s 2 (za DZ). Stoga je

$$\sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_n b_n = 2, \quad \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \min\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = b_1 = \frac{-1}{2}.$$

Koristeći formule

$$\begin{aligned}
\sup(A \cdot B) &= \max\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}, \\
\inf(A \cdot B) &= \min\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\},
\end{aligned}$$

dobivamo

$$\sup S = 1, \quad \inf S = -\frac{1}{4}$$

b) Najprije ćemo iz rekurzivne formule odrediti kandidate za limes. Rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$L = \frac{L^2 + 3}{2L}$$

dobijemo $L_{1,2} = \pm\sqrt{3}$. Dokažimo indukcijom da je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Prvo uočimo da je $a_1 = 2 > 0$. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n > 0$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n} > 0$$

jer je brojnik $a_n^2 + 3 \geq 3 > 0$, a nazivnik $2a_n > 0$ po induktivnoj pretpostavci. Po principu matematičke indukcije zaključujemo da je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Stoga je jedini kandidat za limes $L = \sqrt{3}$. Dokažimo sada da je niz ograničen odozdo s $\sqrt{3}$. (Uočimo da smo ograničenost odozdo već dokazali (niz je ograničen odozdo s nulom). Međutim, ova ocjena će nam kasnije trebati u dokazu monotonosti). Vrijedi $a_1 = 2 > \sqrt{3}$. (*)

Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n} \geq \sqrt{3} \iff a_n^2 + 3 \geq 2a_n\sqrt{3} \iff (a_n - \sqrt{3})^2 \geq 0.$$

(Uočimo da smo u gornjim nejednakostima množili s $a_n > 0$.) Kako je $(a_n - \sqrt{3})^2 \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to je $a_{n+1} \geq \sqrt{3}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. (**)

Iz (*) i (**) slijedi $a_n \geq \sqrt{3}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokažimo sada da je zadani niz padajuć. Imamo

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n} \leq a_n \iff a_n^2 + 3 \leq 2a_n^2 \iff 3 \leq a_n^2 \iff \sqrt{3} \leq |a_n| \iff \text{(jer je } a_n > 0\text{)}\ \sqrt{3} \leq a_n.$$

Kako je $a_n \geq \sqrt{3}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to je $a_{n+1} \leq a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. niz je padajući. Budući da je niz padajuć i ograničen odozdo, on je konvergentan, a iz rekurzivne formule dobivamo da je $\lim_n a_n = \sqrt{3}$.

Zadatak 2. (15 bodova)

a) (5 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, takva da je $f(\langle 0, +\infty\rangle) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$. Je li f neprekidna na $\mathbb{R}$? Obrazložite odgovor.

b) (5 bodova) Neka je $f : [-1, 2] \times [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x+y)^3$. Je li f uniformno neprekidna funkcija? Obrazložite odgovor.

c) (5 bodova) Za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadanu s $f(x, y) = (x + y, x^2y, x + y^2)$ odredite $f'(-1, 1)(0, 1)$.

Rješenje.

a) Skup $\langle 0, +\infty\rangle$ je povezan skup (dokazano na predavanjima). Dokažimo da je skup $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$ nepovezan skup. Stavimo $U = \langle 0, +\infty\rangle \times \langle 0, +\infty\rangle$ i $V = \langle -\infty, 0\rangle \times \langle -\infty, 0\rangle$. Tada su U i V otvoreni skupovi i vrijedi

$$\begin{aligned}
&(i)\, U \cap A \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset, (\text{ npr. } (2, 2) \in U \cap A, (-2, -2) \in V \cap A)\\
&(ii)\, A \subseteq U \cup V,\\
&(iii)\, U \cap V \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset.
\end{aligned}$$

Dakle, A je nepovezan skup. Pošto neprekidne funkcije preslikavaju povezane skupove u povezane, f nije neprekidna funkcija.

b) Definirajmo $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_1(x, y) = x, p_2(x, y) = y$. Na predavanjima smo dokazali da su p_1 i p_2 neprekidne funkcije pa je i $f = (p_1 + p_2)^3$ neprekidna funkcija. Skup $K = [-1, 2] \times [0, 2]$ je zatvoren (jer je njegov komplement

$$(\langle -\infty, -1\rangle \times \mathbb{R}) \cup (\langle 2, \infty\rangle \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \langle -\infty, 0\rangle) \cup (\mathbb{R} \times \langle 2, \infty\rangle)$$

otvoren skup). Nadalje, $K \subset K(0, 10)$ pa je K ne samo zatvoren, nego i omeđen skup, tj. kompaktan skup. Neprekidne funkcije na kompaktnom skupu su uniformno neprekidne pa je f uniformno neprekidna.

c) Vrijedi

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \\ 1 & 2y \end{bmatrix},$$

što znači da je

$$f'(-1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

odakle slijedi

$$f'(-1, 1)(0, 1) = (1, 1, 2).$$

Zadatak 3. (25 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ s

$$f(x,y) = xy^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Može li se funkcija f dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$? Ako je odgovor potvrdan, je li tako dobivena funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$? Je li klase C^1?

Rješenje. Prvo provjerimo može li se funkcija f dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$. Definirajmo $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_1(x,y) = x, p_2(x,y) = y$. Na predavanjima smo dokazali da su p_1 i p_2 neprekidne funkcije pa je i $f = p_1 p_2^3 \sin \frac{1}{p_1^2+p_2^2}$ neprekidna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vrijedi

$$0 \le \left| xy^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right| \le |xy^3|.$$

Kako je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy^3| = 0$, po teoremu o sendviču slijedi da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| xy^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right| = 0,$$

a onda iz toga slijedi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Stavimo li $f(0,0) := 0$, funkcija f će biti neprekidna na $\mathbb{R}^2$. Na predavanjima smo dokazali da su p_1 i p_2 diferencijabilne funkcije pa je i $f = p_1 p_2^3 \sin \frac{1}{p_1^2+p_2^2}$ diferencijabilna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Provjerimo još je li diferencijabilna u $(0,0)$. Računamo parcijalne derivacije u $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Kandidat za diferencijal je nul-operator. Provjerimo vrijedi li

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathbf{0}(h_1,h_2)|}{||h||} = 0.$$

Vrijedi

$$0 \le \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathbf{0}(h_1,h_2)|}{||h||} = \frac{|h_1 h_2^3 \sin \frac{1}{h_1^2+h_2^2}|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{|h_1 h_2^3|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} |h_2^3| \le |h_2^3|.$$

Kako je $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_2^3| = 0$, po teoremu o sendviču slijedi da je

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathbf{0}(h_1,h_2)|}{||h||} = 0,$$

dakle, f je diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$. Računamo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy^3 \cos \frac{1}{x^2+y^2} \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy^3 \cos \frac{1}{x^2+y^2} \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Lako se, uz pomoć projekcija, vidi da su parcijalne derivacije neprekidne na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
0 &\le \left| y^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy^3 \cos \frac{1}{x^2+y^2} \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \right| \le |y^3| + \left| \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \\
&= |y^3| + 2\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \le |y^3| + 2|y| \\
0 &\le \left| 3xy^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} + xy^3 \cos \frac{1}{x^2+y^2} \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \right| \\
&\le |3xy^2| + \left| \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| = |3xy^2| + 2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2 |x| \le |3xy^2| + |x|.
\end{aligned}$$

Kako je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y^3| + 2|y| = 0$ i $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |3xy^2| + |x| = 0$, po teoremu o sendviču zaključujemo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

dakle, parcijalne derivacije su neprekidne na $\mathbb{R}^2$, odnosno f je klase C^1 na $\mathbb{R}^2$.

Zadatak 4. (25 bodova)

a) (8 bodova) Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funkcija, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Precizno definirajte sljedeće pojmove: **limes** funkcije f u točki x_0, **neprekidnost** funkcije f u točki x_0, **diferencijabilnost** funkcije f u točki x_0 te **parcijalne derivacije** funkcija f_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ u točki x_0.

b) (13 bodova) Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{R}$. Dokažite da je $(a_n)_n$ konvergentan ako i samo ako je Cauchyev.

c) (4 boda) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna fukcija i $P \subseteq \mathbb{R}$ povezan skup u $\mathbb{R}$. Mora li nužno $f^{-1}(P)$ biti povezan skup u $\mathbb{R}$? Ako je tvrdnja točna, dokažite je, a ako je netočna navedite kontraprimjer.

Rješenje.

a) i b) Vidjeti predavanja.

c) Stavimo npr. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada je f neprekidna funkcija, $P = \{1\}$ povezan skup, a njegova praslika $f^{-1}(P) = \{-1, 1\}$ je nepovezan skup.

OSNOVE MATEMATIČKE ANALIZE

Prvi ispitni rok – 17. lipnja 2024.

Zadatak 1. (35 bodova)

a) (20 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{n^2m - 2n^2 + m - 2}{3mn^2 + mn + n + 3n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Odgovor detaljno obrazložite.

b) (15 bodova) Zadan je niz realnih brojeva

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 5}{2b_n}, n \in \mathbb{N}$$

Dokažite da je taj niz konvergentan i odredite mu limes.

Zadatak 2. (15 bodova)

a) (5 bodova) Zadana je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, takva da je $g([0,1] \cup [2,3]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$. Je li g neprekidna na $\mathbb{R}$? Obrazložite odgovor.

b) (5 bodova) Neka je $f : [1,2] \times [-2,5] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^7$. Je li f uniformno neprekidna funkcija? Obrazložite odgovor.

c) (5 bodova) Za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadanu s $f(x,y) = (x, y^2, x-y)$ odredite $f'(1,1)(1,0)$.

Zadatak 3. (25 bodova) Zadana je funkcija $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ s

$$g(x,y) = x^3 y \cos \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Može li se funkcija g dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$? Ako je odgovor potvrdan, je li tako dobivena funkcija diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$? Je li klase C^1?

Zadatak 4. (25 bodova)

a) (8 bodova) Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funkcija, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Precizno definirajte sljedeće pojmove: **limes** funkcije f u točki x_0, **neprekidnost** funkcije f u točki x_0, **diferencijabilnost** funkcije f u točki x_0 te **parcijalne derivacije** funkcija f_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ u točki x_0.

b) (13 bodova) Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$. Dokažite da je i niz $(a_n \cdot b_n)_n$ konvergentan niz.

c) (4 boda) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna fukcija i $K \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan skup u $\mathbb{R}$. Mora li nužno $f^{-1}(K)$ biti kompaktan skup u $\mathbb{R}$? Ako je tvrdnja točna, dokažite je, a ako je netočna navedite kontraprimjer.