Osnove matematičke analize

1. kolokvij – 22. travnja 2024.

1. (13 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{mn^2 + n^2 - m - 1}{2mn^2 - mn + 4n^2 - 2n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Rješenje: Uočimo da je

$$\frac{mn^2 + n^2 - m - 1}{2mn^2 - mn + 4n^2 - 2n} = \frac{m+1}{m+2} \cdot \frac{n^2 - 1}{2n^2 - n},$$

pa vidimo da je $S = S_1 \cdot S_2$, gdje su

$$S_1 = \left\{ \frac{m+1}{m+2} : m \in \mathbb{N} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \frac{n^2 - 1}{2n^2 - n} : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vidimo da su $S_1, S_2 \subseteq [0, +\infty\rangle$, pa je

$$\inf S = \inf S_1 \cdot \inf S_2, \quad \sup S = \sup S_1 \cdot \sup S_2.$$

Odredimo supremum i infimum od S_1. Kako je

$$\frac{m+1}{m+2} = 1 - \frac{1}{m+2},$$

a niz $\left(\frac{1}{m+2}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ je padajuć, niz $\left(\frac{m+1}{m+2}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ je rastuć. Dakle, infimum skupa S_1 jednak je prvom članu tog niza koji je jednak $\frac{2}{3}$. Također, uočimo da je $\left(\frac{m+1}{m+2}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ograničen odozgo s 1, pa imamo rastući odozgo ograničen niz. Iz toga slijedi da je on konvergentan, a limes mu je upravo supremum od S_1. Kako je limes tog niza jednak 1, vidimo da je to supremum od S_1.

Još preostaje odrediti supremum i infimum od S_2. Označimo $a_n = \frac{n^2-1}{2n^2-n}$. Provjerimo monotonost tog niza, tj. kada je $a_n \leq a_{n+1}$. Računom se dobije da je taj uvjet ekvivalentan

$$n^2 - 3n - 1 \leq 0.$$

Za funkciju $f(x) = x^2 - 3x - 1$ vrijedi $f(x) \leq 0$ ako i samo ako je

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Kako je $3 < \sqrt{13} < 4$, donja ograda je < 0, a gornja između 3 i 4, pa vidimo da za $x \in \mathbb{N}$ ovo vrijedi samo za $x \in \{1, 2, 3\}$. Odnosno zaključujemo da je $a_n \leq a_{n+1}$ ako i samo ako je $n \in \{1, 2, 3\}$, pa je

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 > a_5 > a_6 > \dots$$

Sada vidimo da je najveći član tog niza i supremum skupa S_2 jednak $a_4 = \frac{15}{28}$. S druge strane, očito $a_n \geq 0 = a_1$, za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je $\inf S_2 = 0$. Sada možemo zaključiti da je

$$\inf S = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0, \quad \sup S = 1 \cdot \frac{15}{28} = \frac{15}{28}.$$

2. (12 bodova)

a) (6 bodova) Dokažite da je za $\alpha > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(1+\alpha)^n}{n} = +\infty$.

b) (6 bodova) Odredite sve parametre $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje je niz

$$a_n = \frac{((-1)^n + \alpha \cos \frac{n\pi}{2})^n}{n}$$

konvergentan.

Rješenje:

a) Vrijedi

$$\frac{(1+\alpha)^n}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k}{n} \geq \frac{\binom{n}{2}\alpha^2}{n} = \frac{(n-1)\alpha^2}{2}.$$

Iz Arhimedovog aksioma slijedi da za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{(n_0-1)\alpha^2}{2} > M$, a onda zbog $\alpha^2 > 0$ vrijedi i $\frac{(n-1)\alpha^2}{2} > M$, za sve $n \geq n_0$. Iz ovoga slijedi tražena tvrdnja.

b) Uočimo da je

$$a_{2k-1} = \frac{-1}{2k-1}, \quad a_{4k-2} = \frac{(1-\alpha)^{4k-2}}{4k-2}, \quad a_{4k} = \frac{(1+\alpha)^{4k}}{4k}.$$

Kako je $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$, vidimo da je 0 svakako gomilište niza (a_n). Sada tražimo $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da to bude jedino gomilište. Iz a) dijela zaključujemo da ne može biti $\alpha > 0$ (jer inače $\lim_{k\to\infty} a_{4k} = +\infty$). Dakle $\alpha \leq 0$. Ponovno iz a) dijela vidimo da za $\alpha < 0$, $\lim_{k\to\infty} a_{4k-2} = +\infty$, pa je jedina mogućnost $\alpha = 0$.

3. (12 bodova)

a) (6 bodova) Izračunajte $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+\sin n+9^n}$.

b) (6 bodova) Dokažite da niz (a_n) definiran rekurzivno s

$$a_1 = t$$
$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n,\ n \in \mathbb{N}$$

ima limes u $\mathbb{R}$ ako i samo ako je $t \in [-1,0]$.

Rješenje:

a) Uočimo da je
$$n+\sin n+9^n \geq n-1+9^n \geq 9^n$$
za sve $n \in \mathbb{N}$ pa je
$$\sqrt[n]{n+\sin n+9^n} \geq \sqrt[n]{9^n} = 9.$$
Dokažimo indukcijom da je $n \leq 9^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $n=1$, tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Sada je
$$n+1 \leq 9^n+1 < 9^n+9^n = 2\cdot 9^n < 9\cdot 9^n = 9^{n+1}.$$
Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\sin n \leq 1$ i $n \leq 9^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi
$$n+\sin n+9^n \leq n+1+9^n < 9^n+9^n+9^n = 3\cdot 9^n$$
pa je
$$\sqrt[n]{n+\sin n+9^n} < \sqrt[n]{3\cdot 9^n} = 9\sqrt[n]{3}.$$
Dokazali smo
$$9 \leq \sqrt[n]{n+\sin n+9^n} < \sqrt[n]{3\cdot 9^n} = 9\sqrt[n]{3}.$$
Kako je $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} = 1$, to je $\lim_{n\to+\infty}(9\sqrt[n]{3}) = 9$. Po teoremu o sendviču slijedi da je $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+\sin n+9^n} = 9$.

b) Uočimo da iz $a_n^2 \geq 0$ slijedi $a_{n+1} = a_n^2 + a_n \geq 0 + a_n = a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ pa je niz rastući za sve $t \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ Pretpostavimo da je zadani niz konvergentan i označimo s L njegov limes. Dokažimo da je tada nužno $t \in [-1,0]$.

Iz rekurzivne relacije $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ dobivamo da je $L = L^2 + L$, odakle slijedi da je $L = 0$. Dakle, $(a_n)_n$ je rastući niz koji konvergira u 0 pa je 0 supremum skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Stoga mora vrijediti $a_n \leq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, a onda je i $t = a_1 \leq 0$. Nadalje, kako mora vrijediti i $a_2 \leq 0$, to znači da je $t^2 + t \leq 0$. Kako je $t \leq 0$, onda iz toga slijedi da je $t + 1 \geq 0$, tj. $t \geq -1$, odnosno $t \in [-1, 0]$.

$\Longleftarrow$ Pretpostavimo da je $t \in [-1, 0]$. Dokažimo da je tada zadani niz konvergentan. Već smo dokazali da je niz rastući pa je dovoljno dokazati da je ograničen. Dokažimo matematičkom indukcijom da je $a_n \in [-1, 0]$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi jer je $t \in [-1, 0]$. Pretpostavimo da je $a_n \in [-1, 0]$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a_n \leq 0$ i $a_n + 1 \geq 0$ pa je njihov umnožak $a_{n+1} = a_n^2 + a_n = a_n(a_n + 1) \leq 0$.
S druge strane, iz $a_{n+1} \geq a_n \geq -1$ slijedi da je $a_{n+1} \geq -1$.
Po principu matematičke indukcije vrijedi $a_n \in [-1, 0]$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Niz je ograničen i monotono rastući pa je konvergentan.

4. (13 bodova)

a) (8 bodova) Definirajte supremum i infimum ograničenog skupa $S \subset \mathbb{R}$. Definirajte limes niza realnih brojeva i gomilište niza realnih brojeva. Dokažite da ako je $(a_n)_n$ rastući, ograničen niz u $\mathbb{R}$ da je

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

b) (3 boda) Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom sljedeću tvrdnju: Ako je a gomilište niza $(a_n)_n$ i b gomilište niza $(b_n)_n$, onda je $a \cdot b$ gomilište niza $(a_n \cdot b_n)_n$.

c) (2 boda) Navedite primjere konvergentnih nizova realnih brojeva $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ takvih da je $b_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i da niz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ divergira.

Rješenje:

a) Vidjeti predavanja.

b) Tvrdnja nije istinita. Uzmimo npr.

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{n paran,} \\ 1, & \text{n neparan,} \end{cases} \qquad , \qquad b_n = \begin{cases} 1, & \text{n paran,} \\ 0, & \text{n neparan.} \end{cases}$$

Uočimo da je 1 gomilište nizova $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$, dok $1 \cdot 1 = 1$ nije gomilište niza $(a_n \cdot b_n)_n$ jer je $a_n \cdot b_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

c) Uzmimo npr. $a_n = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ konvergentni nizovi. Vrijedi

$$\frac{a_n}{b_n} = n,$$

a to je niz koji divergira.