MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 6. rujna 2023.

Zadatak 1 (15 bodova)

(a) (8 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{2mn + 4m}{mn + m + n + 1} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \mid m, n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

(b) (7 bodova) Odredite sva gomilišta niza

$$a_n = \left(\frac{5n+7}{n}\right)(-1)^n + (2 + (-1)^n)\cos(n\frac{\pi}{2}),\ n \in \mathbb{N}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 6. rujna 2023.

Zadatak 2 (20 bodova)

(a) (12 bodova) Niz a_n je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{9 - 2a_n}{7 - 2a_n}.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

(b) (8 bodova) Dokažite da je skup

$$S = \left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \right) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

kompaktan.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 6. rujna 2023.

Zadatak 3 (15 bodova)

(a) (3 boda) Postoji li neprekidna funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava $g([0,1]) = [-10,9] \cup [9,10]$?

(b) (6 bodova) Može li se funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ zadana kao

$$f(x.y) = \frac{x^4y^2 + x^2y^2 + x^2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

proširiti do neprekidne funkcije čija je domena čitav $\mathbb{R}^2$? Može li se proširiti i do diferencijabilne funkcije čija je domena čitav $\mathbb{R}^2$?

(c) (6 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Odredite sve parcijalne derivacije funkcije f u točki $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$. Postoje li sve parcijalne derivacije funkcije f u točki $(0,0,0)$? Obrazložite.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 6. rujna 2023.

Zadatak 4 (20 bodova)

(a) (5 bodova) Definirajte konvergentan niz u $\mathbb{R}$. Neka je a_n ograničen, padajući niz u $\mathbb{R}$. Dokažite da je a_n konvergentan niz.

(b) (8 bodova) Neka su (X, δ) i (Y, ρ) metrički prostori, $f : X \to Y$ funkcija i $x_0 \in X$. Definirajte neprekidnost funkcije f u točki x_0 (ϵ, δ definicija). Iskažite i dokažite Heineovu karakterizaciju neprekidnosti funkcije f u točki x_0.

(c) (7 bodova) Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : U \to \mathbb{R}^m$ funkcija. Definirajte direfencijabilnost funkcije f u točki $x_0 \in U$. Ako je f diferencijabilna u točki $x_0 \in U$, kako izgleda matrica operatora $f'(x_0)$ u paru kanonskih baza za $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$? Dokažite tu tvrdnju.