

Matematika 1

Zadaci za vježbu

1 Matematička indukcija

1.1. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.2. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1^2 - 2^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.3. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$7^n \geq 1 + 6n.$$

1.4. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$2 \cdot 4^n \leq 3^n + 5^n.$$

1.5. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

1.6. Dokažite da je

$$3^{2n+3} + 40n - 27$$

djeljiv sa 64 za svaki prirodni broj n .

1.7. Dokažite da je

$$3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

djeljiv sa 7 za svaki prirodni broj n .

1.8. Dokažite da je

$$3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$$

djeljiv sa 17 za svaki prirodni broj n .

1.9. Dokažite da za svaki prirodni broj n , $n \geq 5$ vrijedi

$$2^n \geq n^2.$$

2 Funkcije

2.1. Izrazite površinu kocke kao funkciju njenog volumena.

2.2. Ispitajte koje su od sljedećih funkcija parne, koje neparne, a koje niti parne niti neparne:

i) $f(x) = x^5 - 4x$,

ii) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1$,

iii) $f(x) = x^2 + |x|$,

iv) $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$,

v) $f(x) = \frac{x-x^2}{4x^2+1}$.

2.3. Odredite prirodne domene sljedećih funkcija:

i) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$,

ii) $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$,

iii) $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$,

iv) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^{-3}-8}$,

v) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$

vi) $f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$,

vii) $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x}{x-2}$,

viii) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x}$,

ix) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|-1}}$,

x) $f(x) = \frac{1}{e^x-1} + \frac{1}{e^{x+1}}$,

xi) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\ln(1-x)}$,

xii) $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x-4}{x+2}\right)}$,

xiii) $f(x) = \frac{1}{\sin x - 1}$,

xiv) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2.4. Odredite $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ ako je:

i) $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$,

ii) $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$, $g(x) = \frac{x}{x-2}$,

iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2 - 4x$.

2.5. Odredite $f \circ g \circ h$, ako je $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{x-2}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

2.6. Ispitajte je li funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana sa $f(x) = -5x + 8$ bijekcija. Ukoliko je bijekcija, odredite f^{-1} .