Distribucije vjerojatnosti i intervali pouzdanosti

Izv.prof. Rosa Karlić

Predavanje 6, MZIRuB 2024/2025

04.12.2024.

Populacije i uzorci

- Populacija (od interesa) : cijela skupina ispitanika o kojima želimo nešto zaključiti
- Uzorak – podskup populacije
- **Parametar** – karakteristika populacije (npr. srednja vrijednost populacije, μ)
- **Statistika** – bilo koja funkcija ispitanika u nasumičnom uzorku (npr. srednja vrijednost uzorka, $\overline{x}$)
- Poželjno je odabrati **nasumičan uzorak** iz populacije kako u analizu ne bismo uvodili **pristranost**

Slučajna varijabla

- funkcija koja dodjeljuje numeričke vrijednosti različitim događajima u prostoru uzorka
- npr. studija u kojoj istraživači izlažu bakterijski soj mutagenu i zatim mjere broj mutacija koje se javljaju u određenom genu nakon određenog broja generacija
- može poprimiti samo pozitivne vrijednosti

Ishod	Pridružena numerička vrijednost (x)
0	5
1	12
2	7
…	…

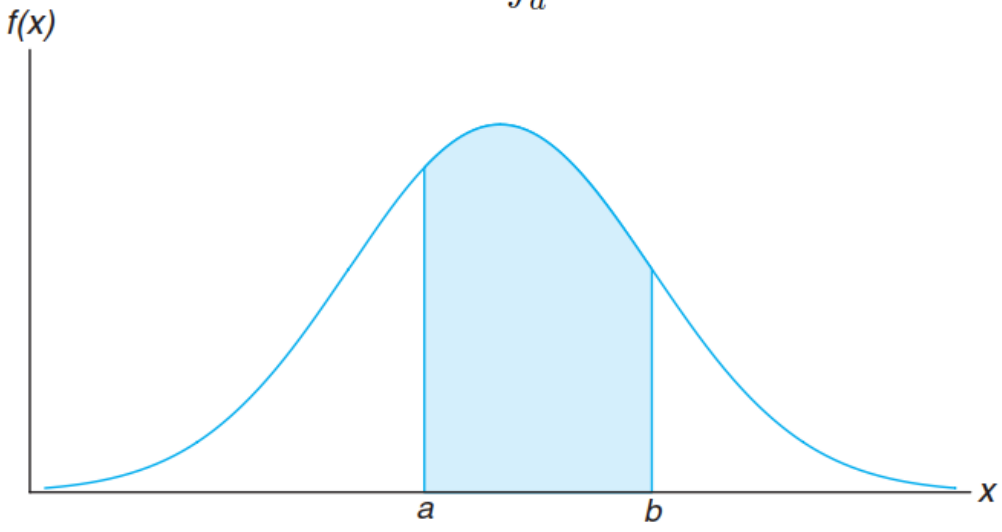
Slučajna varijabla

- Slučajne varijable mogu biti:
  - Diskretne
    - Starost pacijenata u godinama X = {0, 1, 2, 3, …, N}
    - Broj mutacija u DNA lancu X = {0, 1, 2, 3, …, N}
  - Kontinuirane
    - Visina pacijenta X = (0, M)
    - Tjelesna temperatura pacijenta X = (M, N)
- Opisujemo ih distribucijama vjerojatnosti – vjerojatnost da će slučajna varijabla poprimiti određenu vrijednost ili se nalaziti u određenom intervalu

Kontinuirane slučajne varijable

- Mogu poprimiti beskonačno mnogo vrijednosti
- Područje vrijednosti – interval na brojevnom pravcu ili cijeli brojevni pravac
- Određujemo vjerojatnost da će se vrijednost kontinuirane slučajne varijable nalaziti unutar nekog intervala (vjerojatnost da će poprimiti točno određenu vrijednost je 0)
- Opisuju se funkcijama gustoće vjerojatnosti

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

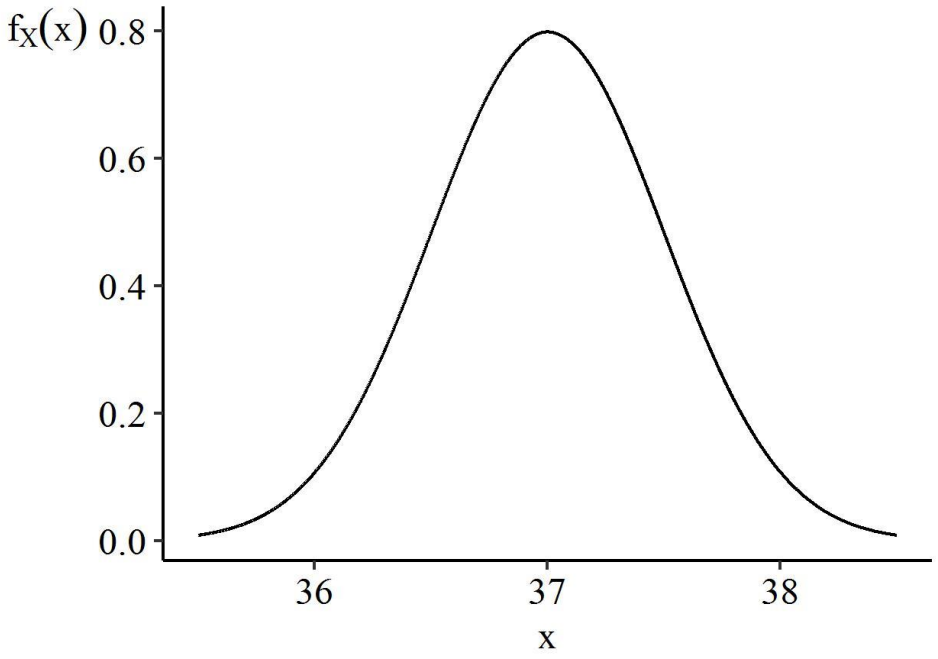


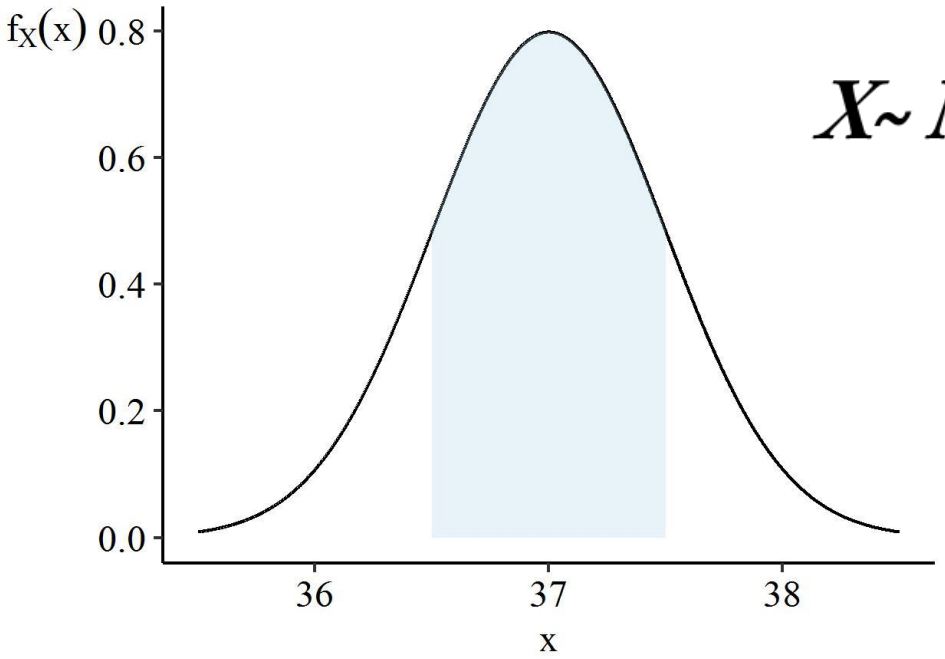
Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L. and Ye, K. (2012) *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*

Kontinuirane slučajne varijable - primjer

- Tjelesna temperatura ispitanika
- μ (srednja vrijednost) and σ (standardna devijacija) određuju lokaciju i oblik distribucije

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$





$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

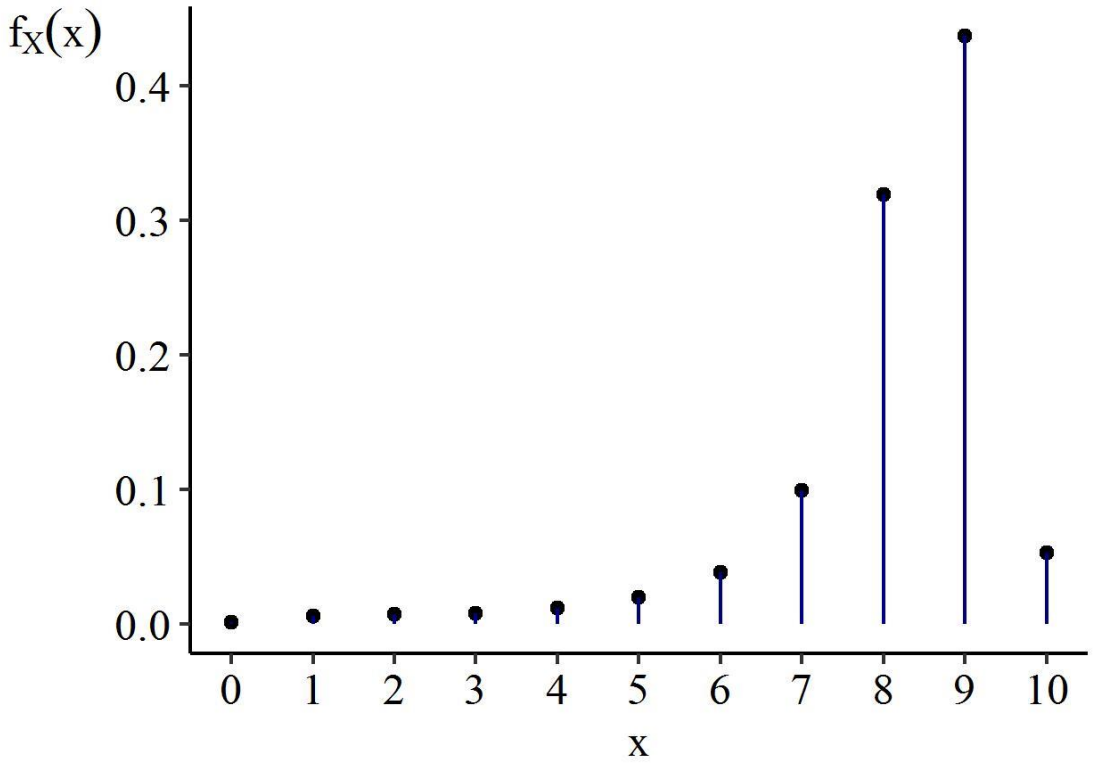
Diskretne slučajne varijable

- Mogu poprimiti prebrojivo mnogo diskretnih vrijednosti
- Svaka vrijednost ima konačnu vjerojatnost
- Opisuju se funkcijama mase vjerojatnosti

$$f_X(x) = P(X = x)$$

Diskretne slučajne varijable - primjer

- Apgar ocjena



$F_x(x)$	x
0.001	0
0.006	1
0.007	2
0.008	3
0.012	4
0.020	5
0.038	6
0.099	7
0.319	8
0.437	9
0.053	10

Kumulativna funkcija distribucije

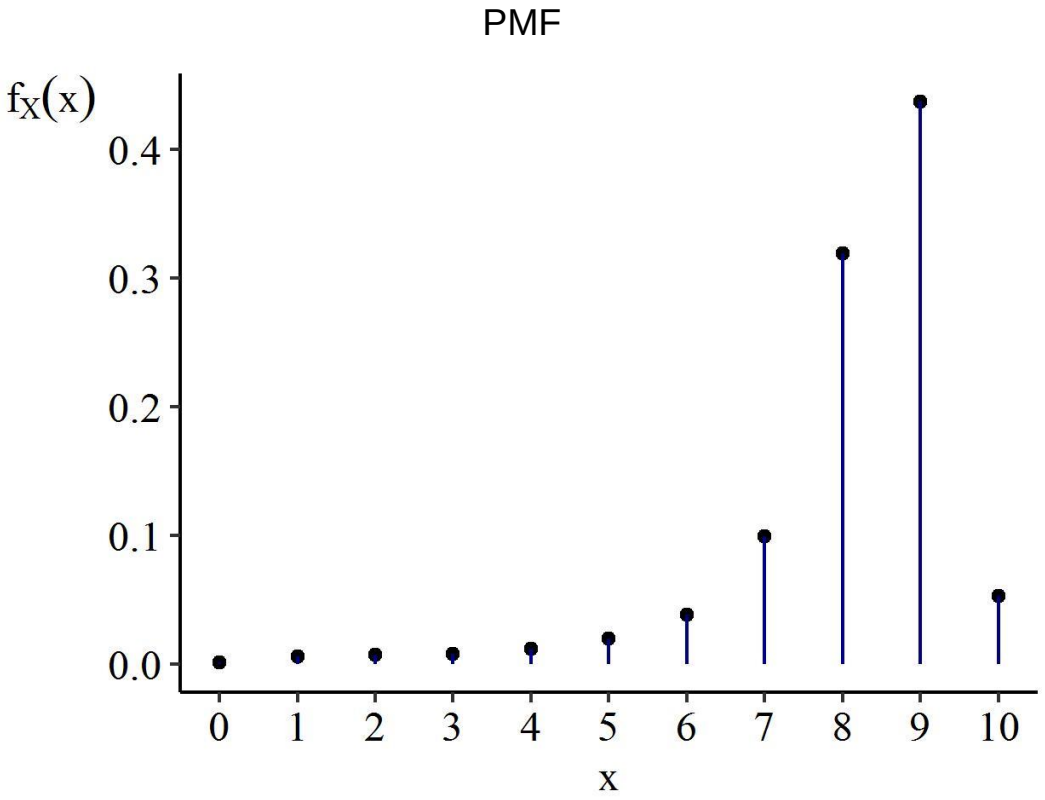
- Cumulative distribution function (CDF)
- Vjerojatnost da je vrijednost slučajne varijable *X* manja ili jednaka od *x*

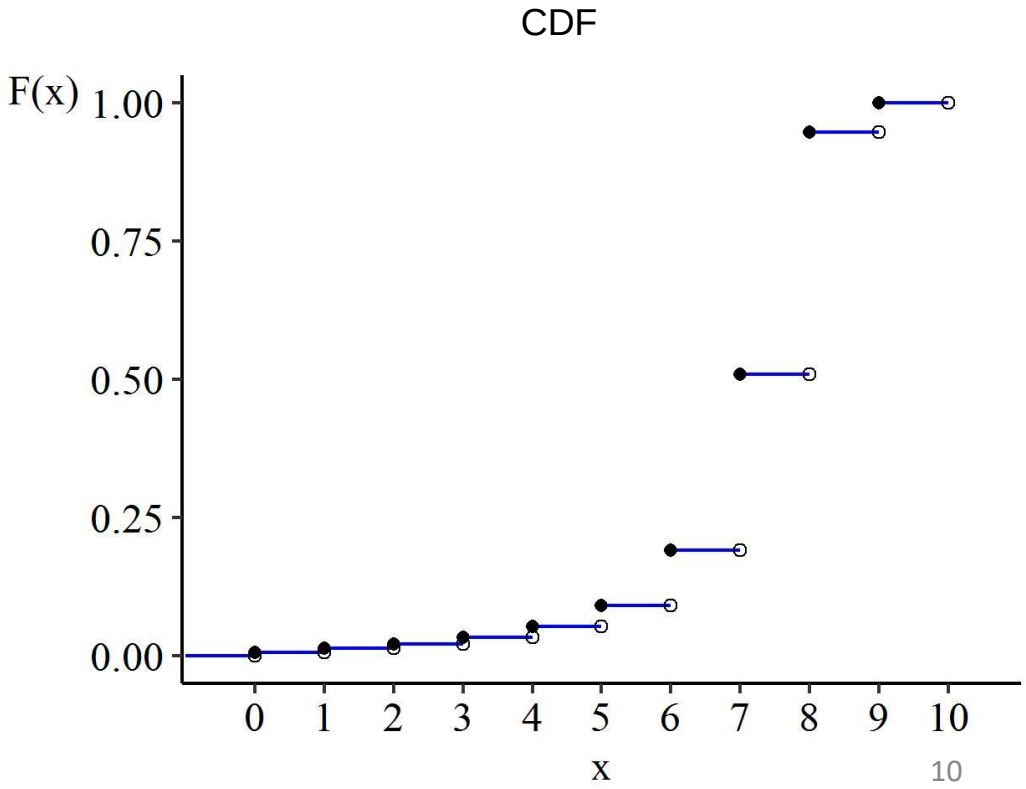
$$F(x) = P(X \leq x)$$

Kumulativna funkcija distribucije

- Diskretne slučajne varijable
- Monotono se povećava od 0 do 1

$$F(x) = P(X \leq x)$$



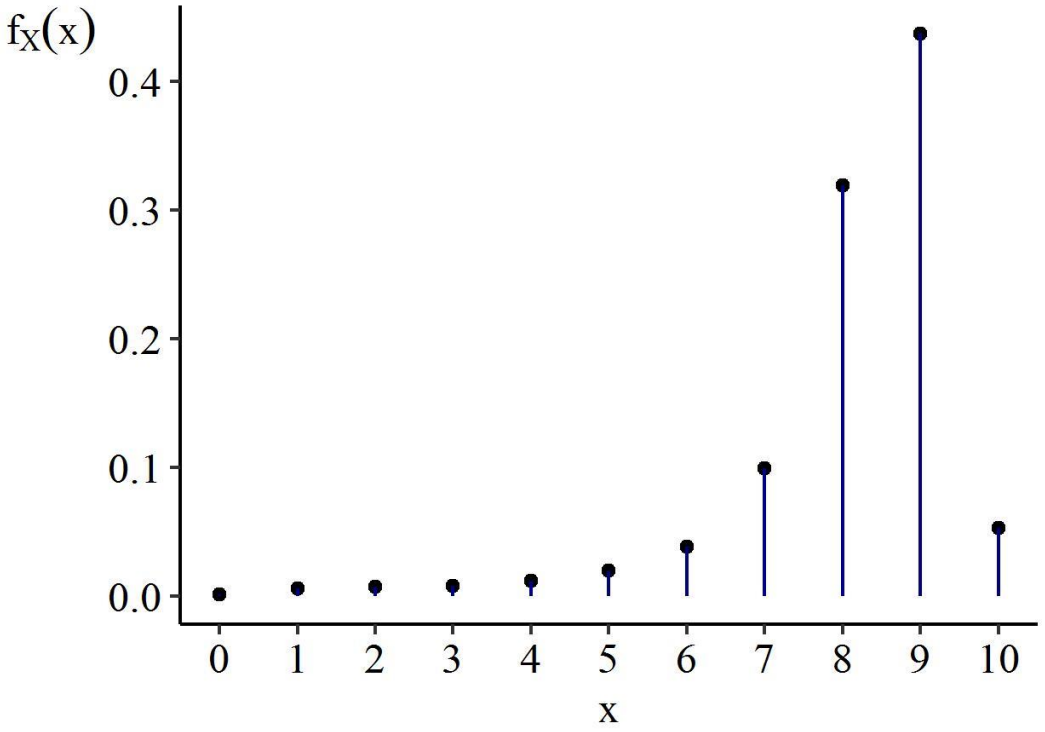


Kumulativna funkcija distribucije

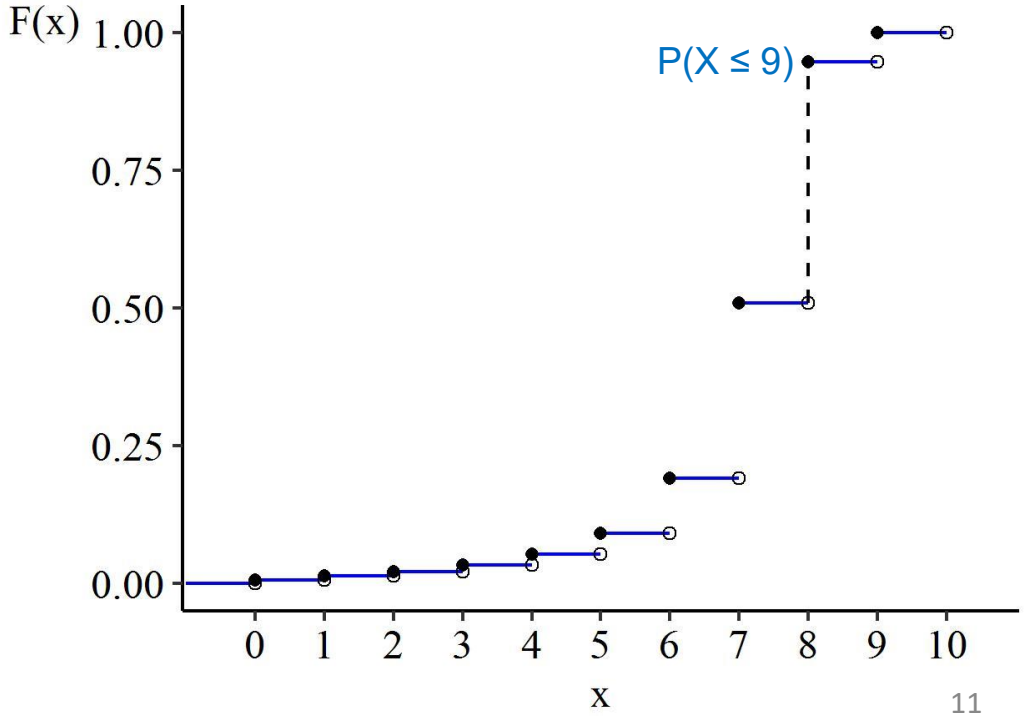
- Diskretne slučajne varijable
- Monotono se povećava od 0 do 1

$$F(x) = P(X \leq x)$$

PMF



CDF

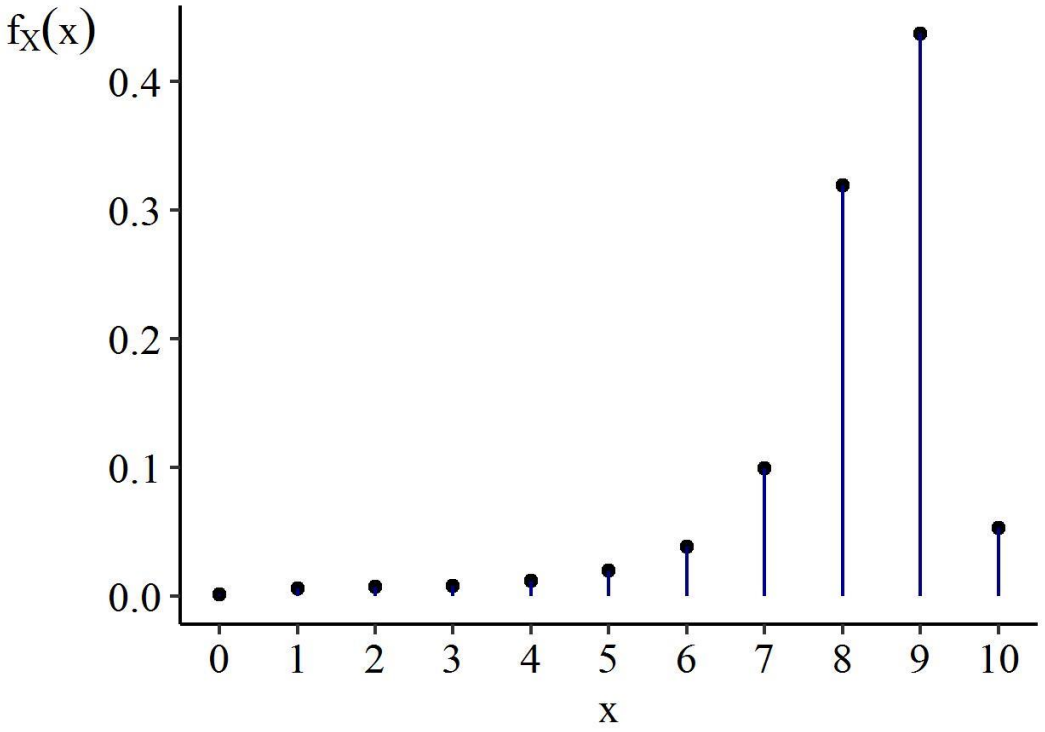


Kumulativna funkcija distribucije

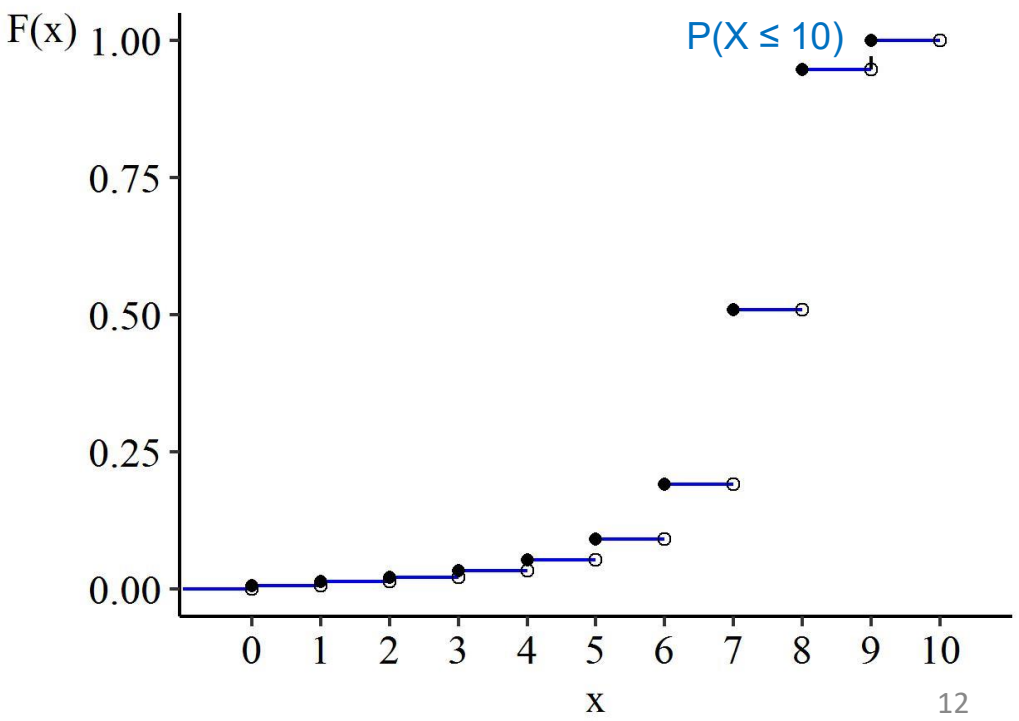
- Diskretne slučajne varijable
- Monotono se povećava od 0 do 1

$$F(x) = P(X \leq x)$$

PMF

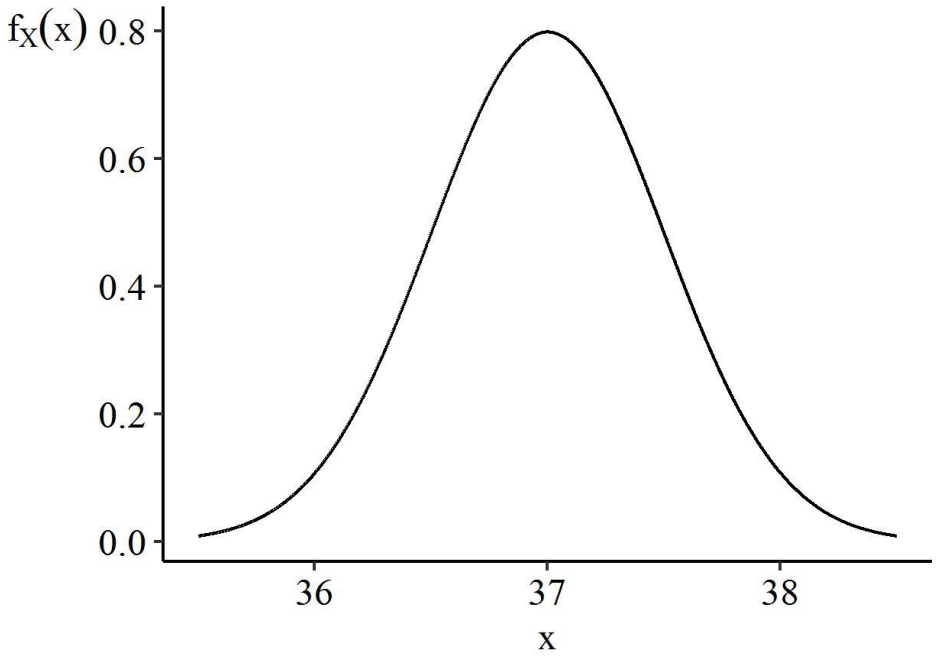


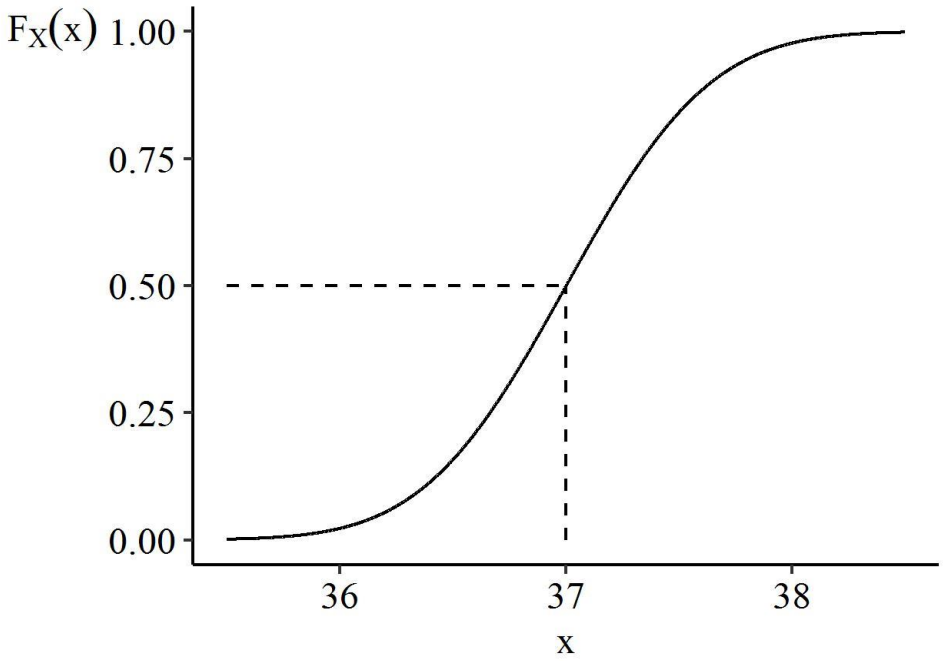
CDF



Kumulativna funkcija distribucije

- Kontinuirane slučajne varijable $F(x) = P(X \leq x)$
- Monotono se povećava od 0 do 1





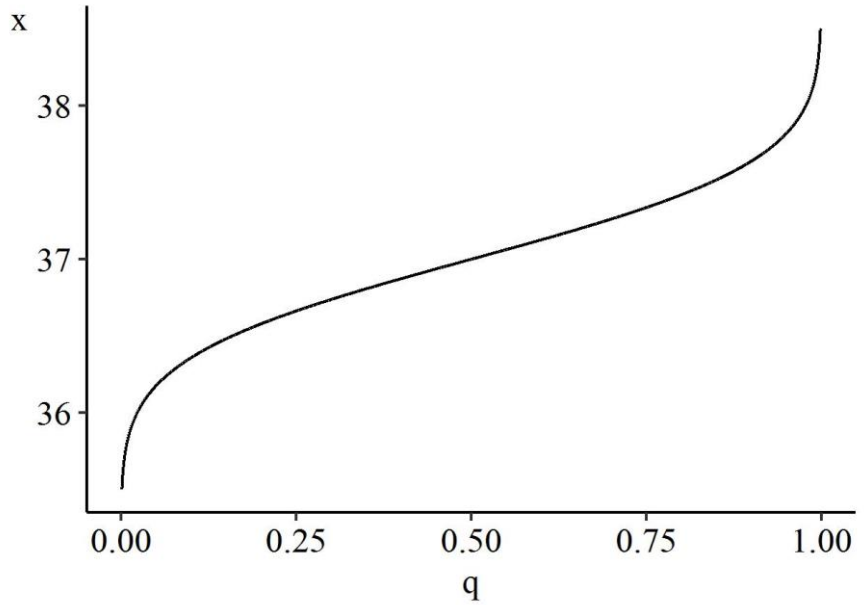
Kvantilna funkcija (Inverse CDF)

- Ako je X slučajna varijabla sa CDF F. Kvantilna funkcija (inverse CDF) je definirana kao:

za $$F^{-1}(q) = \inf\left\{x : F(x) \geq q\right\}$$

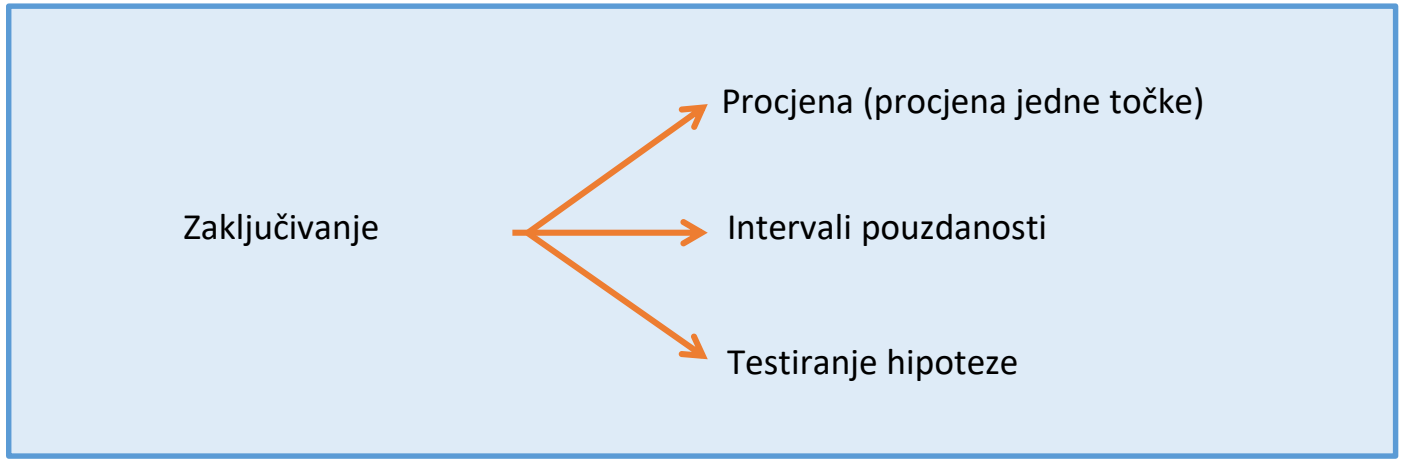
$$q \in [0,1]$$

- $F^{-1}(1/4)$ – prvi kvartil
- $F^{-1}(1/2)$ - medijan
- $F^{-1}(3/4)$ – treći kvartil



Statističko zaključivanje

- Proces korištenja podataka za donošenje zaključaka o distribuciji koja je generirala podatke ili nekoj značajki te distribucije, kao što je srednja vrijednost
- Dominantni pristupi: frekventističko zaključivanje i Bayesovo zaključivanje



Procjena parametara

Zaključujemo nešto o populaciji na temelju informacija dobivenih iz uzorka

- Statistike se koriste kao procjene parametara

- Procjena u jednoj točki
- Procjena u obliku intervala

Intervali pouzdanosti

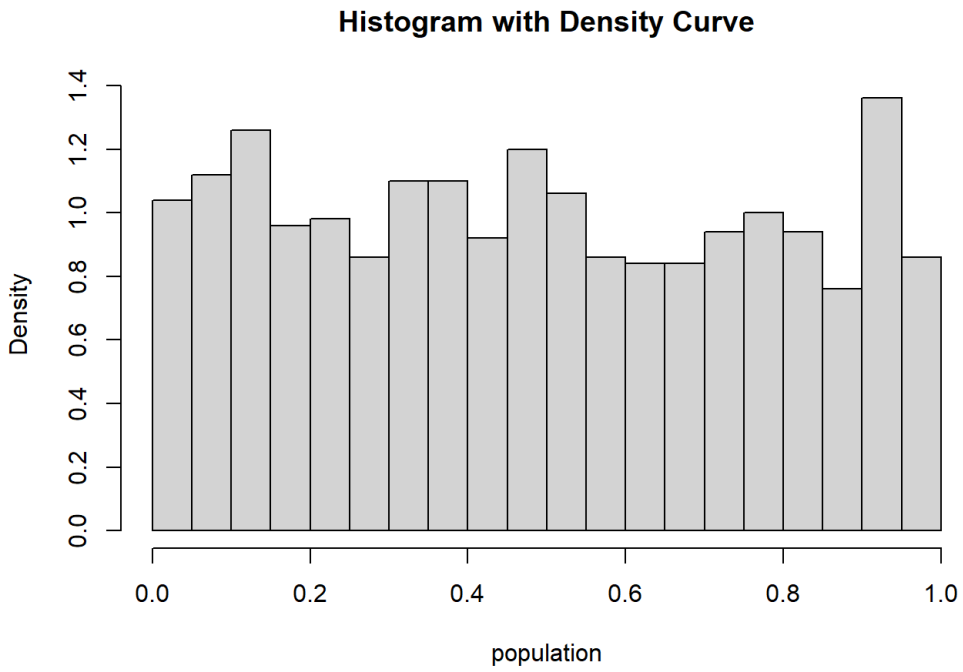
- Koristi se za izražavanje preciznosti i nesigurnosti povezanih s određenom metodom uzorkovanja.
- Sastoji se od tri dijela:
- Razina pouzdanosti - opisuje nesigurnost metode uzorkovanja
- Statistika
- Margina greške

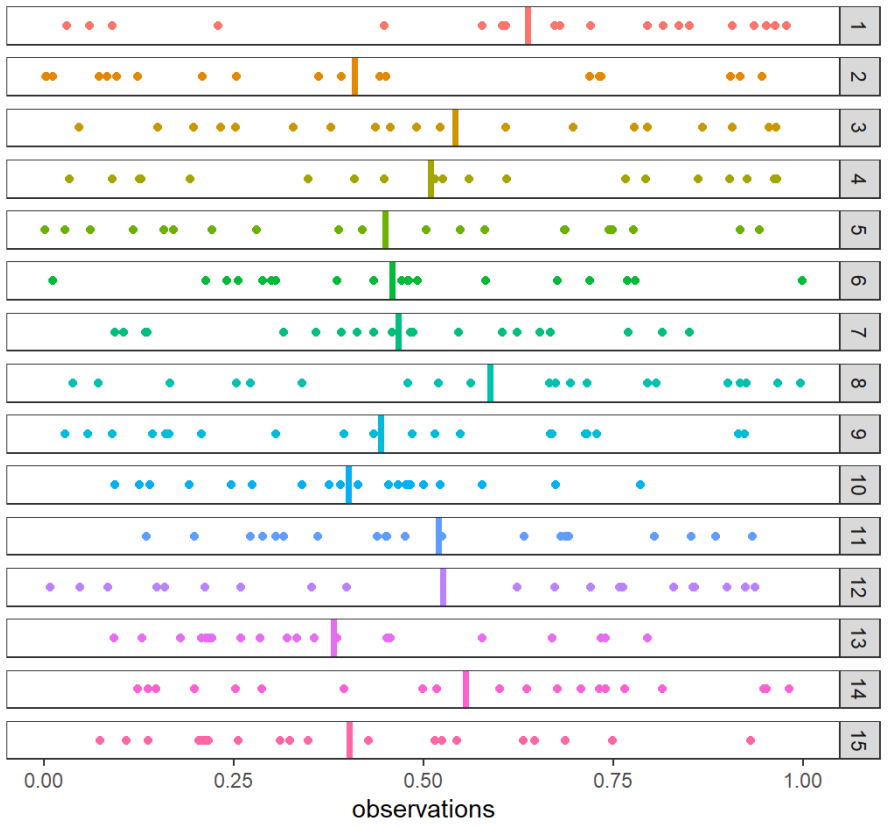
Definiraju procjenu intervala koji opisuje preciznost metode

- Razina pouzdanosti - koliko čvrsto vjerujemo da će neka metoda uzorkovanja proizvesti interval pouzdanosti koji uključuje stvarni parametar populacije.

Centralni granični teorem

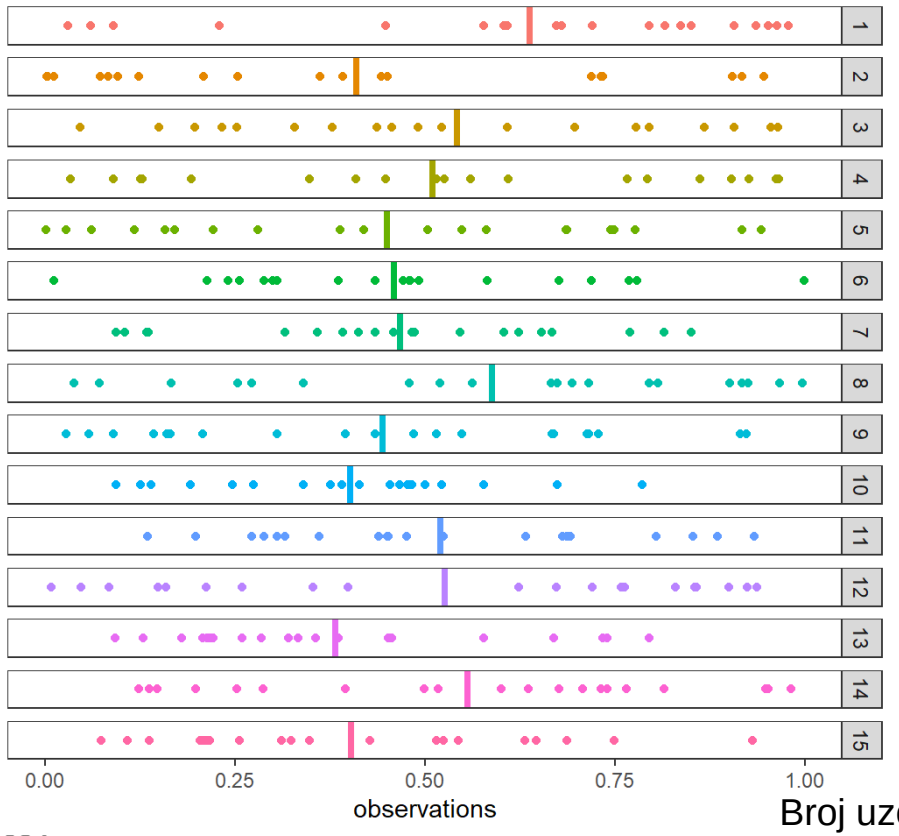
- Distribucija procjena statistika zbroja ili prosjeka i.i.d. slučajne varijable bit će normalne ili gotovo normalne ako je veličina uzorka dovoljno velika



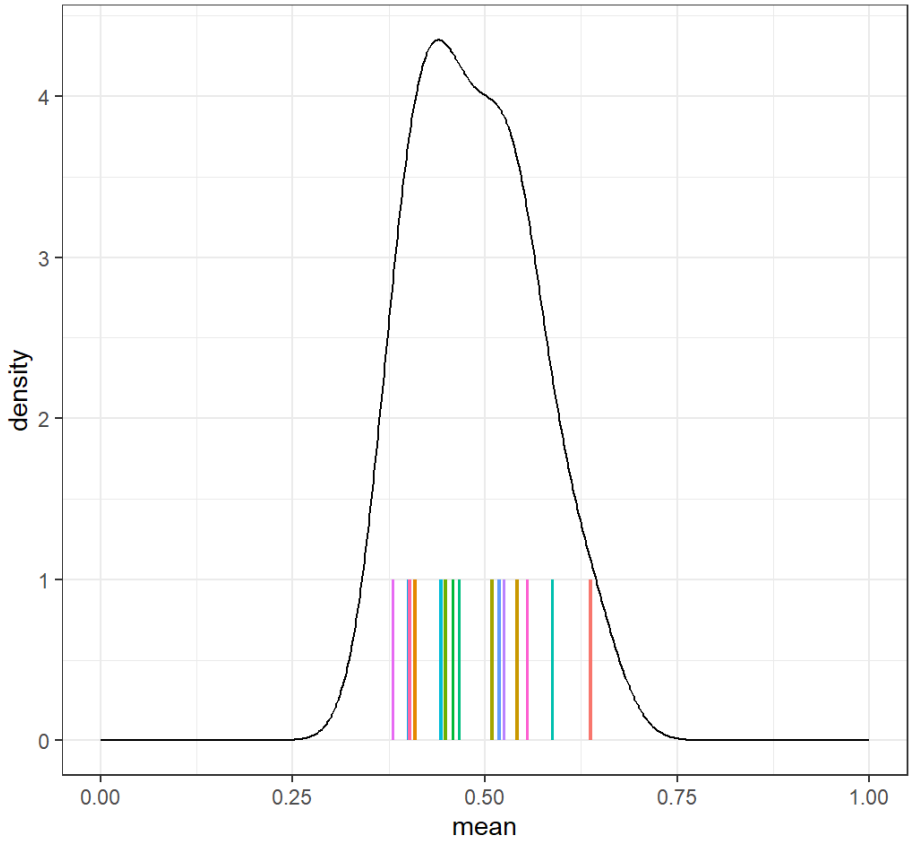


Centralni granični teorem

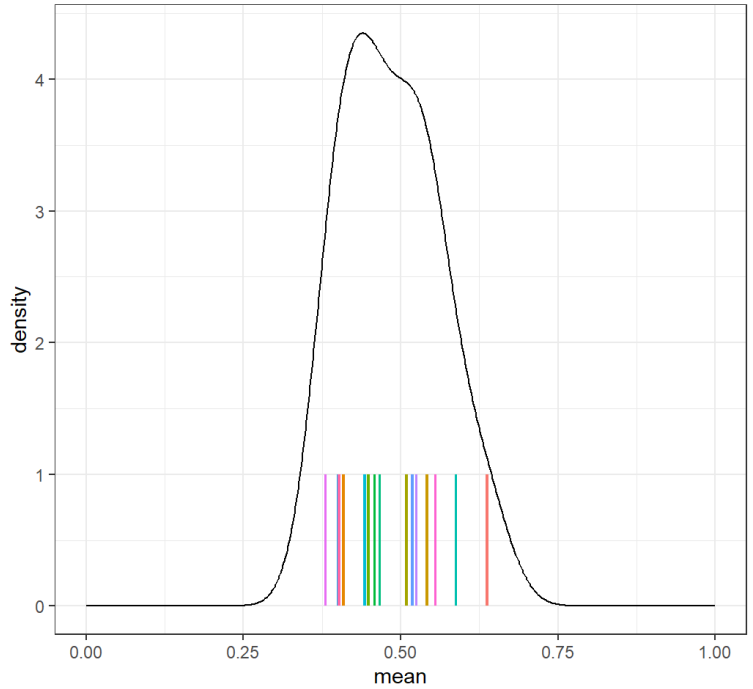
- Distribucija procjena statistika zbroja ili prosjeka i.i.d. slučajne varijable bit će normalne ili gotovo normalne ako je veličina uzorka dovoljno velika



Broj uzorka



Centralni granični teorem



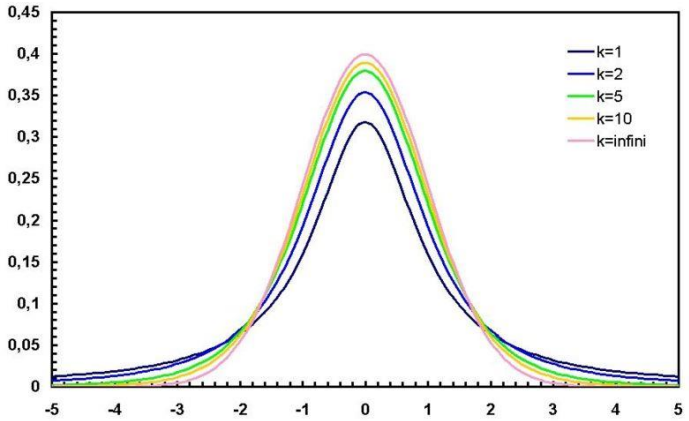
- Statistiku možemo izraziti kao t-vrijednost ili kao z-vrijednost (koristite t-vrijednost kada je veličina uzorka mala ili je standardna devijacija populacije nepoznata)
  - Standardna devijacija statistike
  - Standardna greška statistike

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

$$SE_{\bar{x}} = s / \sqrt{n}$$

Studentova t-distribucija

- Obitelj sličnih distribucija vjerojatnosti.
- Specifična t-distribucija ovisi o stupnjevima slobode, ν.
- Stupnjevi slobode – broj neovisnih opažanja u uzorku podataka koji su dostupni za procjenu parametra populacije iz koje je taj uzorak izvučen
- Srednja vrijednost t-distribucije je nula.
- Kako ν raste, t-distribucija postaje normalnija.



$$f_\nu(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}(1+\frac{t^2}{\nu})^{-(\nu+1)/2}$$

$$-\infty \le t \le +\infty$$

T-test na jednom uzorku

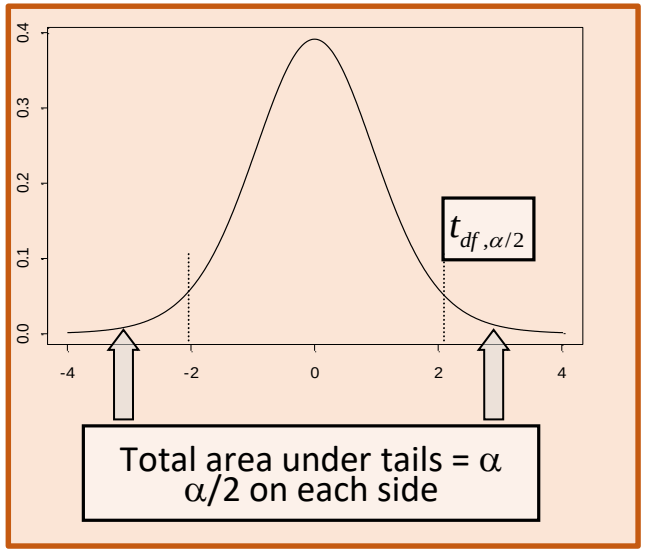
- Pretvorimo statistiku u t-vrijednost:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \qquad \Pr\left[-t_{df,\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \leq t_{df,\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left[-t_{df,\alpha/2}(s/\sqrt{n}) \leq \bar{x} - \mu \leq t_{df,\alpha/2}(s/\sqrt{n}) \right] = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left[t_{df,\alpha/2}(s/\sqrt{n}) \geq -\bar{x} + \mu \geq -t_{df,\alpha/2}(s/\sqrt{n}) \right] = 1 - \alpha$$

$$\Pr\left[\bar{x} - t_{df,\alpha/2}(s/\sqrt{n}) \leq \mu \leq \bar{x} + t_{df,\alpha/2}(s/\sqrt{n}) \right] = 1 - \alpha$$



$$(1-\alpha)\%\ C.I.: \quad \bar{x} \pm t_{df,\alpha/2} SE$$

$$SE_{\bar{x}} = s / \sqrt{n}$$

Kako konstruirati interval pouzdanosti

- Identificirajte statistiku uzorka.
- Odaberite razinu pouzdanosti.
- Pronađite marginu greške.
  - Margina greške = kritična vrijednost * standardna devijacija statistike
  - Margina greške = kritična vrijednost * standardna greška statistike
- Odredite interval pouzdanosti. Nesigurnost je označena razinom pouzdanosti.

Interval pouzdanosti = statistika uzorka ± margina greške

Margina greške

= kritična vrijednost * standardna devijacija (ili standardna greška) statistike

Primjer

- Želimo procijeniti prosječnu težinu odraslih muškaraca u Zagrebu. Odaberemo nasumičan uzorak 1,000 muškaraca iz populacije od 1,000,000 muškaraca i izvažemo ih. Izmjerili smo da je prosječna težina našeg uzorka 92 kg, a standardna devijacija uzorka je 14kg. Izračunajte 95% interval pouzdanosti.

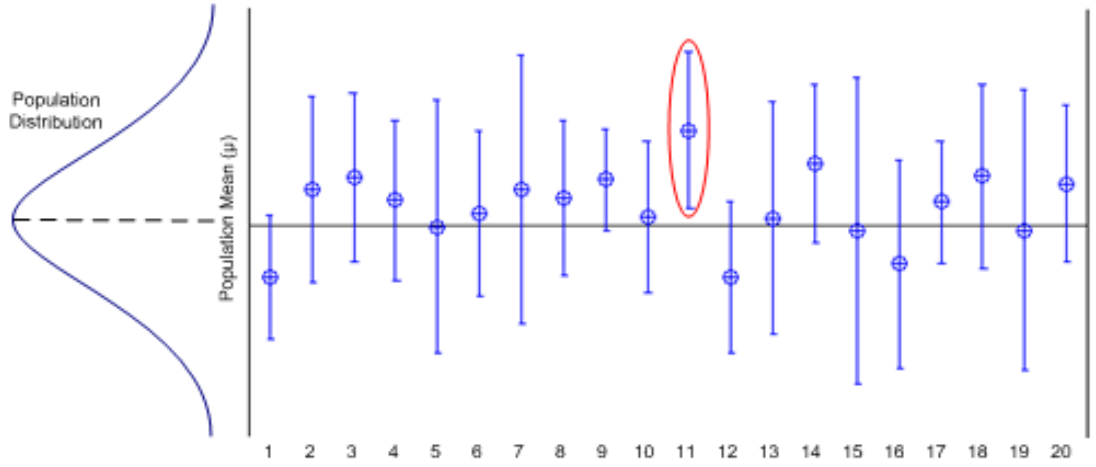
$\alpha = 0.05;\ \bar{x} = 92;\ s = 14;\ n = 1000;\ df=999$

df – degrees of freedom (stupnjevi slobode)

95% interval pouzdanosti: $92 \pm t_{999,0.025}(14/\sqrt{1000}) = 92 \pm 0.87$

Interpretacija intervala pouzdanosti

- Kad bi se uzeli ponovljeni uzorci i izračunao interval pouzdanosti od 95% za svaki uzorak, 95% intervala sadržavalo bi srednju vrijednost populacije.



- Standardna devijacija – koliko su raspršena mjerenja
- Standardna greška – preciznost procjene određene mjere
- Interval pouzdanosti – preciznost metode uzorkovanja