MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 26. lipnja 2024.

Zadatak 1. (20 bodova)

(a) (20 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$$

te skicirajte njen graf.

(b) (5 bodova) U kojim točkama njene prirodne domene ne postoje prva i druga derivacija? Geometrijski interpretirajte tu činjenicu.

Rješenje.

(a) Domena funkcije je $\mathbf{R}$, a nultočke su točka $x_0 = -2, 1$.

Nema kandidata za vertikalnu asimptotu.

Provjerimo ima li funkcija kosu asimptotu:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1 - 3x^{-2} + 2x^{-3}} = 1.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}{x} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\frac{3(x^2-1)}{3\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}x - \sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x - x^3 + 3x - 2}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}} = 0.$$

Dakle, pravac $y = x$ je kosa asimptota.

Izračunajmo derivaciju:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}$$

pa funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, -1]$ i na $[1, +\infty\rangle$, a pada na na $[-1, 1]$. Funkcija ima lokalni minimum u točki $x = 1$ i iznosi $f(1) = 0$, a lokalni maksimum u točki $x = -1$ i iznosi $f(-1) = \sqrt[3]{4}$.

Druga derivacija:

$$f''(x) = -2\frac{(x - 1)^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^5}}$$

pa je funkcija konveksna na intervalu $\langle -\infty, -2]$, a konkavna na $[-2, 1]$ i na $[1, +\infty\rangle$ te ima jednu točku infleksije $x = -2$ za koju je $f(-2) = 0$.

(b) Prva i druga derivacija ne postoje u točkama $x = -2$ (u njoj ima vertikalnu tangentu) i $x = 1$ (u njoj nema jedinstvenu tangentu).

MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 26. lipnja 2024.

Zadatak 2. Promatramo funkciju $f : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ definiranu s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(a) (5 bodova) Dokažite da je funkcija f integrabilna na svakom ograničenom intervalu $[a, b]$, $0 \leq a < b$.

(b) (12 bodova) Izračunajte $\int_1^e f(x)\, dx$.

(c) (8 bodova) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

Rješenje.

(a) Ako je $a, b > 0$, tada je na intervalu $[a, b]$ funkcija neprekidna pa je i integrabilna. Promotrimo još slučaj $a = 0$, odnosno, promotrimo primjerice interval $[0, 1]$. Uočimo da je $\lim_{x\to 0} \frac{x \ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = 0$ pa je funkcija ograničena na intervalu $[0, 1]$ i ima prekid prve vrste u samo jednoj točki: $x = 0$ (u ostalim točkama je neprekidna). Prema korolaru s predavanja znamo da je takva funkcija Riemann integrabilna na tom segmentu, tj. na intervalu $[0, 1]$.

(b) Parcijalna integracija: $u = \ln(x + 1)$, $dv = \frac{(x+1)}{\sqrt{(1+(x+1)^2)^3}}\, dx$.

(c) Usporedba s integralom funkcije $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ koji je konvergentan.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 26. lipnja 2024.

Zadatak 3. (24 boda) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n\ln n + \ln^2 n}\right)$$

Rješenje. Dani red ima pozitivne članove, pa je zbog $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ i $\lim_n \frac{1}{n\ln n+\ln^2 n} = 0$ ekvivalentno gledati red

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n + \ln^2 n}$$

Kako je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = [L'H] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

imamo

$$\lim_n \frac{n\ln n + \ln^2 n}{n\ln n} = 1 + \lim_n \frac{\ln n}{n} = 1$$

pa je ekvivalentno gledati red

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\ln n}$$

Odnosno konvergenciju integrala

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} &= \lim_{\xi\to+\infty} \int_3^{\xi} \frac{dx}{x\ln x} = [t = \ln x]\\ &= \lim_{\xi\to+\infty} \int_{\ln 3}^{\ln \xi} \frac{dt}{t} = \lim_{\xi\to+\infty} [(\ln\ln\xi) - (\ln\ln 3)] = +\infty\end{aligned}$$

Dani red divergira.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 26. lipnja 2024.

Zadatak 4. (26 bodova) Razvij funkciju u red potencija oko 0 i odredi radijus konvergencije

$$h(x) = \ln(1 + 6x - 7x^2).$$

Rješenje. Oko 0

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1 + 6x - 7x^2) = \ln(1 - x)(1 + 7x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 7x) \\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(7x)^n}{n} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}(-1 + 7^n)}{n}x^n. \end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{7}7^n \leq -1 + 7^n \leq 7^n$, $\lim_n(\frac{1}{7})^{1/n} = 1$ i $\lim_n n^{1/n} = 1$ imamo

$$\lim_n \left|\frac{(-1)^{n-1}(-1 + 7^n)}{n}\right|^{1/n} = \lim_n(-1 + 7^n)^{1/n} = 7.$$

Slijedi $R = \frac{1}{7}$.