JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.

Zadatak 1. (10 bodova) Izračunajte:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n}\left(\frac{1}{(n+1)(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n})}+\frac{1}{(n+2)(\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n})}+\ldots+\frac{1}{2n(\sqrt[3]{2n}+\sqrt[3]{n})}\right).$$

Rješenje. Namještamo izraz da bude jednak integralnoj sumi funkcije $f(x)=\frac{1}{(1+x)(\sqrt[3]{1+x}+1)}$ na intervalu $[0,1]$:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n}}+1\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(\sqrt[3]{1+x}+1)} = \log(16)-3\log\left(1+\sqrt[3]{2}\right) \end{aligned}$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2024.

Zadatak 2. Promatramo funkciju $f : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ definiranu s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

a) (4 boda) Dokažite da je funkcija f integrabilna na svakom ograničenom intervalu $[a, b]$, za $0 \leq a < b$.

b) (6 bodova) Izračunajte $\int_1^e f(x)\,dx$.

c) (5 bodova) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Rješenje.

a) Ako je $a, b > 0$, tada je na intervalu $[a, b]$ funkcija neprekidna pa je i integrabilna. Promotrimo još slučaj $a = 0$, odnosno, promotrimo primjerice interval $[0, 1]$. Uočimo da je $\lim_{x\to 0} \frac{x \ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = 0$ pa je funkcija ograničena na intervalu $[0, 1]$ i ima prekid prve vrste u samo jednoj točki: $x = 0$ (u ostalim točkama je neprekidna). Prema korolaru s predavanja znamo da je takva funkcija Riemann integrabilna na tom segmentu, tj. na intervalu $[0, 1]$.

b) Parcijalna integracija.

c) Usporedba s integralom funkcije $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ koji je konvergentan.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2024.

Zadatak 3. (12 bodova) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}\right).$$

Rješenje. Označimo $a_n = \frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$. Vrijedi $0 < a_n \leq 1$, te

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{3n+1}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

pa red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

konvergira i $\lim_n a_n = 0$. Sada, zbog $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ imamo

$$\lim_n \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$

pa dani red konvergira.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2024.

Zadatak 4. (13 bodova) Razvij funkciju u red potencija oko 0 i odredi radijus konvergencije

$$f(x) = \ln(1 + 2x - 3x^2).$$

Rješenje. Oko 0

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + 2x - 3x^2) = \ln(1 - x)(1 + 3x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 3x) \\ &= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(3x)^n}{n} \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}((-1)^n + 3^n)}{n} x^n. \end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{3}3^n \leq (-1)^n + 3^n \leq 3^{n+1}$, $\lim_n (\frac{1}{3})^{1/n} = 1$ i $\lim_n n^{1/n} = 1$ imamo

$$\lim_n \left| \frac{(-1)^{n-1}((-1)^n + 3^n)}{n} \right|^{1/n} = \lim_n ((-1)^n + 3^n)^{1/n} = 3.$$

Slijedi $R = \frac{1}{3}$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.

Zadatak 1. (10 bodova) Izračunajte:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n}\left(\frac{1}{(n+1)(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n})}+\frac{1}{(n+2)(\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n})}+\ldots+\frac{1}{2n(\sqrt[3]{2n}+\sqrt[3]{n})}\right).$$

Rješenje. Namještamo izraz da bude jednak integralnoj sumi funkcije $f(x)=\frac{1}{(1+x)(\sqrt[3]{1+x}+1)}$ na intervalu $[0,1]$, s obzirom na ekvidistantnu subdiviziju $x_1=\frac{1}{n},\ldots,x_n=\frac{n}{n}$ ($h=\frac{1}{n}$, a f je neprekidna funkcija pa je integrabilna na ograničenom intervalu $[0,1]$):

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n}}+1\right)}\\
&= \lim_{n\to+\infty} h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{dx}{(1+x)(\sqrt[3]{1+x}+1)} = \log(16)-3\log\left(1+\sqrt[3]{2}\right)
\end{aligned}$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2024.

Zadatak 2. Promatramo funkciju $f : [-1, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ definiranu s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\sqrt{(1+(x+1)^2)^3}}, & x > -1, \\ -1, & x = -1. \end{cases}$$

a) (4 boda) Dokažite da je funkcija f integrabilna na svakom ograničenom intervalu $[a, b]$, za $-1 \leq a < b$.

b) (6 bodova) Izračunajte $\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.

c) (5 bodova) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Rješenje.

a) Ako je $a, b > -1$, tada je na intervalu $[a, b]$ funkcija neprekidna pa je i integrabilna. Promotrimo još slučaj $a = -1$, odnosno, promotrimo primjerice interval $[-1, 0]$. Uočimo da je $\lim_{x\to-1} \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\sqrt{(1+(x+1)^2)^3}} = 0$ pa je funkcija ograničena na intervalu $[-1, 0]$ i ima prekid prve vrste u samo jednoj točki: $x = -1$ (u ostalim točkama je neprekidna). Prema korolaru s predavanja znamo da je takva funkcija Riemann integrabilna na tom segmentu, tj. na intervalu $[-1, 0]$.

b) Parcijalna integracija: $u = \ln(x + 1)$, $dv = \frac{(x+1)}{\sqrt{(1+(x+1)^2)^3}}\,dx$.

c) Usporedba s integralom funkcije $\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ koji je konvergentan.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2024.

Zadatak 3. (12 bodova) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1\cdot 6\cdot \ldots \cdot (5n-4)}{1\cdot 7\cdot \ldots \cdot (6n-5)}\right).$$

Rješenje. Označimo $a_n = \frac{1\cdot 6\cdot \ldots \cdot (5n-4)}{1\cdot 7\cdot \ldots \cdot (6n-5)}$. Vrijedi $0 < a_n \leq 1$, te

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{5n+1}{6n+1} = \frac{5}{6} < 1$$

pa red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

konvergira i $\lim_n a_n = 0$. Sada, zbog $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ imamo

$$\lim_n \frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} = 1$$

pa dani red konvergira.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 26. lipnja 2024.

Zadatak 4. (13 bodova) Razvij funkciju u red potencija oko 0 i odredi radijus konvergencije

$$g(x) = \ln(1 + 4x - 5x^2).$$

Rješenje. Oko 0

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1 + 4x - 5x^2) = \ln(1 - x)(1 + 5x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 5x) \\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(5x)^n}{n} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}((-1)^n + 5^n)}{n}x^n. \end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{5}5^n \leq (-1)^n + 5^n \leq 5^{n+1}$, $\lim_n(\frac{1}{5})^{1/n} = 1$ i $\lim_n n^{1/n} = 1$ imamo

$$\lim_n\left|\frac{(-1)^{n-1}((-1)^n + 5^n)}{n}\right|^{1/n} = \lim_n((-1)^n + 5^n)^{1/n} = 5.$$

Slijedi $R = \frac{1}{5}$.