MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 1

(a) (8 bodova) Pokažite da je na $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ dan skalarni produkt sa:

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \right\rangle_V = ax + cz + (a+b+c)(x+y+z).$$

(b) (2 bodova) Neka je $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a-c \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \right\}$ potprostor unitarnog prostora V uz dani skalarni produkt. Odredite $M^\perp$.

Rješenje:

a) Neka su $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & w \end{bmatrix} \in V$, te $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\langle A, A \rangle_V = a^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \geq 0.$
2. $\langle A, A \rangle_V = 0 \iff a^2 = b^2 = (a+b+c)^2 = 0 \iff a = b = c = 0.$
3. $\langle A + X, W \rangle_V$
 $= (a+x)u + (c+z)w + ((a+x) + (b+y) + (c+z))(u+v+w)$
 $= au + cw + (a+b+c)(u+v+w) + xu + zw + (x+y+z)(u+v+w)$
 $= \langle A, X \rangle_V + \langle X, W \rangle_V .$
4. $\langle \alpha A, W \rangle_V$
 $= \alpha au + \alpha cw + (\alpha a + \alpha b + \alpha c)(u+v+w)$
 $= \alpha[au + cw + (a+b+c)(u+v+w)]$
 $= \alpha \langle A, W \rangle_V .$
5. $\langle A, W \rangle_V$
 $= au + cw + (a+b+c)(u+v+w)$
 $= ua + wc + (u+v+w)(a+b+c)$
 $= \langle W, A \rangle_V .$

b) $\begin{bmatrix} a & -a-c \\ 0 & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies M = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right].$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \in M^\perp \iff \begin{aligned} 0 &= \left\langle \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle_V = x, \text{ te} \\ 0 &= \left\langle \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle_V = z \end{aligned}$$

Dakle $M^\perp = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right].$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 2

(6 bodova) Postoji li polinom $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ takav da vrijedi

$$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)p'(x)dx \qquad \text{za sve } p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})?$$

Ako postoji, odredite sve takve q.

Rješenje: Promotrimo $\mathcal{P}_2$ kao unitaran prostor sa (standardnim) skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Kako je preslikavanje

$$f(p) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)p'(x)dx$$

linearan funkcional na $\mathcal{P}_2$, slijedi da postoji jedinstveni $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je

$$f(p) = \langle p, q \rangle, \qquad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_2.$$

Takav $q(x) = ax^2 + bx + c$ možemo dobiti na dva načina: prvi je standardni u kojem u jednakost $f(p) = \langle p, q \rangle$ uvrstimo polinome $1, t, t^2$ te riješimo dobiveni 3x3 sustav. Drugi način je da primijetimo da je za sve $p \in \mathcal{P}_2$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)p'(x)dx \overset{\text{parc. int.}}{=} \int_{-1}^{1} 2xp(x)dx + \underbrace{(1-x^2)p(x)\Big|_{-1}^{1}}_{=0} = \int_{-1}^{1} p(x)\, 2x\, dx.$$

Kako je $q(x) = 2x \in \mathcal{P}_2$, vidimo da je to traženi (jedinstveni) reprezentant.

MATIČNI BROJ STUDENTA	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 3

(a) (9 bodova) Linearan operator $A \in L(\mathbb{R}^4)$ zadan je svojim djelovanjem na bazi

$$A(0,-1,1,0) = (1,0,0,1), \quad A(1,-1,-1,1) = (1,-1,-1,1)$$

$$A(0,1,1,0) = (1,0,0,1), \quad A(0,0,0,1) = (0,0,0,1).$$

Odredite operator A^* te udaljenost vektora $x = (1,1,1,1)$ od $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{Im} A^*$.

(b) (5 bodova) Postoji li matrica $B \in M_4(\mathbb{R})$ takva da je suma elemenata po svakom retku jednaka 2024, a da je linearan operator $L_B \in L(M_{41}(\mathbb{R}))$ definiran s $L_B X = BX$ unitaran? Ako postoji, navedite primjer takve, u suprotnom pokažite da takva ne postoji.

Rješenje:

(a) Označimo s (e) kanonsku bazu za $\mathbb{R}^4$ te s $(f) = \{(0,-1,1,0),(1,-1,-1,1),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$. Tada je matrični zapis operatora A u kanonskoj bazi dan s

$$A(e) = A(e,f)I(f,e) = A(e,f)I(e,f)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

odakle dobijemo

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je (e) ONB, slijedi da je A^* dan s

$$A^*(e) = A(e)^* = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, kako je $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^*$, obje udaljenosti možemo odrediti rastavom x s obzirom na tu ortogonalnu sumu. S obzirom da je iz matričnog zapisa $A(e)$ odmah vidljivo da je $r(A) = 3$ i da je $\operatorname{Ker} A = [\{(0,1,0,0)\}]$, odmah slijedi rastav vektora x s obzirom na $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^*$ u obliku

$$x = (0,1,0,0) + (1,0,1,1).$$

Tada je

$$d(x, \operatorname{Ker} A) = \|(1,0,1,1)\| = \sqrt{3} \qquad \text{te} \qquad d(x, \operatorname{Im} A^*) = \|(0,1,0,0)\| = 1.$$

(b) S obzirom da je L_B unitaran ako i samo ako je B unitarna matrica (pokazano na vježbama), ekvivalentno je pitati se postoji li unitarna matrica kojoj je zbroj elemenata po svakom retku 2024. Pretpostavimo da je matrica B zadovoljava taj (drugi) uvjet. Tada za njene stupce S_1, S_2, S_3, S_4 vrijedi

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \begin{bmatrix} 2024 \\ 2024 \\ 2024 \\ 2024 \end{bmatrix},$$

odnosno imamo

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2024 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo kako za takve B vrijedi $2024 \in \sigma(B)$. Kako sve svojstvene vrijednosti unitarne matrice moraju biti modula 1, vidimo da takva B ne postoji.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 4

(10 bodova) Nađite neku ortogonalnu matricu U takvu da je U^TAU dijagonalna matrica ako je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Iz činjenice da vrijedi $A^* = A^T = A$ slijedi da se A može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi. Računamo:

$$0 = k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda-3)^2(\lambda-5)^2.$$

Sada imamo $\lambda_{1,2} = 3$ te $\lambda_{3,4} = 5$.

Računamo:

$$V_A(3) \ldots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(3) = [\{v_1, v_2\}]$, gdje je $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ te $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dalje računamo:

$$V_A(5) \ldots \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(5) = [\{v_3, v_3\}]$, gdje je $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ te $v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Operator A se dijagonalizira u bazi $(f) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, ali to nije ortonormirana baza.

Primijetimo da vrijedi $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ za $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Dakle, vektori $v_1, \ldots, v_4$ su međusobno ortogonalni, ali moramo ih normirati:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \hat{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, A se dijagonalizira u ortonormiranoj bazi $(\hat{f}) = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4\}$, tj. za matrice

$$D = A(\hat{f}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \ U = [\hat{v}_1 \ \hat{v}_2 \ \hat{v}_3 \ \hat{v}_4],$$

vrijedi da je $U^T A U$ dijagonalna matrica.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 5

(10 bodova) Neka je V unitaran prostor dimenzije $n < \infty$, neka je $A \in L(V)$ hermitski operator s n međusobno različitih svojstvenih vrijednosti te neka je $B \in L(V)$ operator za koji vrijedi $AB = BA$. Dokažite da postoji ortonormirana baza za V u kojoj se oba operatora A i B dijagonaliziraju. Mora li takav operator B i sam biti hermitski?