MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok - 1. srpnja 2024.

ZADATAK 1

(20 bodova) Za $a, b \in \mathbb{R}^3$ definiramo linearan operator $T_{a,b} \in L(\mathbb{R}^3)$ s

$$T_{a,b}(x) = \langle x, b \rangle a.$$

(a) U ovisnosti o a i b odredite rang i defekt danog operatora.

(b) Ako je $a = b = (1, 1, 1)$, odredite $T_{a,b}^{2024}$.

Rješenje:

(a) Ukoliko je jedan od vektora a, b jednak 0, tada je $T_{a,b} = 0$, pa je $r(T_{a,b}) = 0$ i $d(T_{a,b}) = 3$. Inače, kako je očito $\operatorname{Im} T_{a,b} \leq [\{a\}]$, vidimo da je za $a, b \neq 0$ slika točno jednaka $[\{a\}]$, pa je $r(T_{a,b}) = 1$ te $d(T_{a,b}) = 2$.

(b) Označimo s (e) kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3$. Tada je

$$T_{a,b}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa nakon dijagonalizacije ove matrice u obliku $T_{a,b}(e) = SDS^{-1}$ dobivamo

$$T_{a,b}^{2024}(e) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{2024} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3^{2023} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3^{2023} T_{a,b}(e),$$

pa vidimo da je $T_{a,b}^{2024} = 3^{2023} T_{a,b}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok - 1. srpnja 2024.

ZADATAK 2

Neka je dan vektorski prostor $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, sa skalarnim produktom

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*).$$

Neka je $\Phi \in L(V)$ određen djelovanjem

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) (10 bodova) Odredite $\Phi^*\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)$.

(b) (10 bodova) Odredite $\Phi^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)$.

Rješenje: Odredimo $\Phi_{(e)}$ gdje je $(e) = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Neka je

$$(f) = \left\{ f_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sada je

$$\Phi_{(e,f)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_{(e,f)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{te izračunamo} \quad (I_{(e,f)})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Slijedi

$$\Phi_{(e)} = \Phi_{(e,f)} I_{(f,e)} = \Phi_{(e,f)} (I_{(e,f)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Označimo $x = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

a) Baza (e) je ONB pa vrijedi $(\Phi^*)_{(e)} = (\Phi_{(e)})^*$, odnosno $(\Phi^* x)_{(e)} = (\Phi_{(e)})^* x_{(e)}$. Dakle

$$(\Phi^* x)_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 3b + c \\ 2b - c \\ a - 8b + 4c \end{bmatrix} \implies \Phi^*\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - 3b + c & 2b - c \\ 0 & a - 8b + 4c \end{bmatrix}.$$

b) Vrijedi $(\Phi^{-1})_{(e)} = (\Phi_{(e)})^{-1}$, odnosno $(\Phi^{-1} x)_{(e)} = (\Phi_{(e)})^{-1} x_{(e)}$. Dakle

$$(\Phi^{-1} x)_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b - 2c \\ 4a + 3b + 5c \\ a + b + 2c \end{bmatrix} \implies \Phi^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -b - 2c & 4a + 3b + 5c \\ 0 & a + b + 2c \end{bmatrix}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok - 1. srpnja 2024.

ZADATAK 3

Neka je $M = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \colon y_1 - y_2 = y_3 - y_4 = 0\} \leqslant \mathbb{R}^4$.

a) (8 bodova) Odredite ortonormirane baze za M i $M^\perp$.

b) (8 bodova) Odredite skup

$$N = \{y \in \mathbb{R}^4 \colon d(y, M) = d(y, M^\perp)\},$$

gdje je $d(y, M)$ udaljenost vektora y od potprostora M.

c) (4 boda) Vrijedi li $N \leqslant \mathbb{R}^4$?

Rješenje: Ortonormirana baza za M je dana sa:

$$\{e_1, e_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)\right\}.$$

Vrijedi:

$$M^\perp = \{y \in \mathbb{R}^4 \colon \langle y, e_1\rangle = 0,\ \langle y, e_2\rangle = 0\} = [\{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)\}].$$

Ortonormirana baza za $M^\perp$ je dana sa:

$$\{e_3, e_4\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)\}.$$

Proizvoljni vektor $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ može se prikazati kao $y = a + b$, gdje je

$$\begin{aligned}
a &= \langle y, e_1\rangle e_1 + \langle y, e_2\rangle e_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2, y_1 + y_2, y_3 + y_4, y_3 + y_4) \in M,\\
b &= \langle y, e_3\rangle e_3 + \langle y, e_4\rangle e_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2, y_2 - y_1, y_3 - y_4, y_4 - y_3) \in M^\perp.
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
x \in N &\Leftrightarrow d(y, M) = d(y, M^\perp) \Leftrightarrow ||b||^2 = ||a||^2\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2}(y_3 - y_4)^2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{2}(y_3 + y_4)^2\\
&\Leftrightarrow y_1 y_2 + y_3 y_4 = 0.
\end{aligned}$$

Dobivamo da je $N = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \colon y_1 y_2 + y_3 y_4 = 0\}$. Skup N nije zatvoren obzirom na zbrajanje (npr. $(1,0,0,0), (0,1,0,0) \in N$, ali $(1,1,0,0) \notin N$). Dakle, N nije potprostor od $\mathbb{R}^4$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok - 1. srpnja 2024.

ZADATAK 4

(20 bodova) Svedite formu

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz$$

na kanonski oblik, odredite joj definitnost te zapišite nove koordinate pomoću starih.

Rješenje.
Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vrijedi $q(x,y,z) = \langle Av, v\rangle$.
Izračunamo $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda - 6 = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$. Dakle $\sigma(A) = \{0,2,3\}$. Forma je pozitivno semidefinitna. Odredimo svojstvene potprostore.

$$(A - 0I)v = 0 \implies v \in \left[\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \quad v_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_1 := \frac{1}{||v_1||}v_1,$$

$$(A - 2I)v = 0 \implies v \in \left[\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \quad v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_2 := \frac{1}{||v_2||}v_2,$$

$$(A - 3I)v = 0 \implies v \in \left[\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \quad v_3 := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_3 := \frac{1}{||v_3||}v_3.$$

Vektori v_1, v_2 i v_3 su ortogonalni, pa ih je dovoljno normirati da matrica prijelaza, koju ćemo označiti sa Q, iz kanonske baze u bazu sastavljenu od nekih svojstvenih vektora bude ortogonalna.
Definirajmo matrice

$$Q = [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vrijedi $A = QDQ^T$. Uvođenjem supstitucije $w = Q^T v = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{-1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z \\ 0x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}x + \frac{-1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ k \end{bmatrix}$ imamo

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= \langle Av, v\rangle = \langle QDQ^Tv, v\rangle = \langle DQ^Tv, Q^Tv\rangle = \langle Dw, w\rangle \\ &= 0r^2 + 2s^2 + 3k^2. \end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA　　　　IME I PREZIME　　　　BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok - 1. srpnja 2024.

ZADATAK 5

(a) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$ takav da postoji baza (b) za V u kojoj se A dijagonalizira, te $T \in L(V)$ izomorfizam. Dokažite da se tada i operator $B = TAT^{-1}$ može dijagonalizirati. Kako dobijemo bazu u kojoj se B dijagonalizira?

(b) Postoji li normalan linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^4)$ kojemu su 1 i -2 svojstvene vrijednosti te pridruženi svojstveni potprostori $V_A(1) = [\{(1,2,3,2)\}]$ i $V_A(-2) = [\{(1,1,-1,1)\}]$? Odgovor obrazložite.

Rješenje. (a) Neka je $Ab_i = \lambda_i b_i$ za $i = 1, \ldots, n$. Kako je T izomorfizam, skup $\{Tb_1, \ldots, Tb_n\}$ je baza za V. Iz $B = TAT^{-1}$ sijedi $BT = TA$, pa je $B(Tb_i) = TAb_i = T(\lambda_i b_i) = \lambda_i Tb_i$ za $i = 1, \ldots, n$. Prema tome, B se dijagonalizira u bazi $\{Tb_1, \ldots, Tb_n\}$.

(b) Ne postoji, jer su svojstveni vektori normalnog operatora pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni, što ovdje nije slučaj.