Linearna algebra 1
vježbe

Sadržaj

Poglavlje 1

Prostor radijvektora i sustavi linearnih jednadžbi

1.1 Sustavi 2×2

Općeniti 2×2 sustav izgleda kao

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Analitičko-geometrijska interpretacija: rješenje sustava je skup svih točaka koje se nalaze u presjeku pravaca $a_1x + b_1y = c_1$ i $a_2x + b_2y = c_2$. Međusobni položaji dva pravca u ravnini su

(a) pravci se sijeku u jednoj točki $\Leftrightarrow$ postoji jedinstveno rješenje sustava.

(b) pravci su paralelni (ne sijeku se) $\Leftrightarrow$ sustav nema rješenja.

(c) pravci se podudaraju $\Leftrightarrow$ sustava ima beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 1.1. 1)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Rješenje: $x = y = 1$

2)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

Nema rješenja

3)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = -2 \end{cases}$$

Ima beskonačno mnogo rješenja.

1.2 Sustavi 3×3

Nema se puno više za reći o sustavima 2×2 pa prelazimo na 3×3 sustave. To su sustavi oblika

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdje su $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.
Analitičko-geometrijska interpretacija: Svaku jednadžbu možemo shvatiti kao jednadžbu ravnine u prostoru. Za slike mogućih položaja tri ravnine u prostoru vidjeti npr. ovaj link.
Mogući slučajevi:

(a) ravnine se sijeku u jednoj točki $\Leftrightarrow$ postoji jedinstveno rješenje sustava.

(b) ravnine se ne sijeku $\Leftrightarrow$ sustav nema rješenja.

(c) ravnine se sijeku u pravcu $\Leftrightarrow$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja, regulirano jednim parametrom

(d) ravnine se podudaraju $\Leftrightarrow$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja, regulirano s dva parametra

Propozicija 1.2. *Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Tada sustavi linearnih jednadžbi (1.2) i*

$$\begin{aligned} \alpha(a_1x + b_1y + c_1z) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z) &= \alpha d_1 + \beta d_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

imaju isti skup rješenja. Isti rezultat vrijedi ako zamijenimo poredak jednadžbi u sustavu.

Prethodna propozicija nam daje strategiju rješavanja sustava linearnih jednadžbi.

1. Zamjenom redoslijeda jednadžbi sustava zapisat ćemo sustav (1.2) kao sustav

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1x + \tilde{b}_1y + \tilde{c}_1z &= \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2x + \tilde{b}_2y + \tilde{c}_2z &= \tilde{d}_2, \\ \tilde{a}_3x + \tilde{b}_3y + \tilde{c}_3z &= \tilde{d}_3 \end{aligned} \tag{1.4}$$

   pri čemu je $\tilde{a}_1 \neq 0$.

2. Uzastopnom primjenom propozicije konstruiramo sustav

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1x + \tilde{b}_1y + \tilde{c}_1z &= \tilde{d}_1 \\ \tilde{\tilde{b}}_2y + \tilde{\tilde{c}}_2z &= \tilde{\tilde{d}}_2 \\ \tilde{\tilde{b}}_3y + \tilde{\tilde{c}}_3z &= \tilde{\tilde{d}}_3 \end{aligned} \tag{1.5}$$

   koji ima isti skup rješenja kao i polazni sustav (1.2).

3. Ponavljamo korake 1. i 2. s elementima $\tilde{\tilde{b}}_2$ i $\tilde{\tilde{b}}_3$ da bismo konačno dobili sustav

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 x + \tilde{b}_1 y + \quad \tilde{c}_1 z &= \tilde{d}_1 \\ \tilde{\tilde{b}}_2 y + \quad \tilde{\tilde{c}}_2 z &= \tilde{\tilde{d}}_2 \\ \tilde{\tilde{c}}_3 z &= \tilde{\tilde{d}}_3 \end{aligned} \tag{1.6}$$

   koji ima isti skup rješenja kao i polazni sustav (1.2).

Za sustav linearnih jednadžbi (1.6) kažemo da ima **trokutastu formu** i njegovo rješenje je moguće direktno očitati uvrštavanjem treće jednadžbe u drugu i onda rješenje druge u prvu. Takav postupak se zove **povratna supstitucija**. Svođenje na trokutastu formu daje siguran put k rješenju i u slučajevima kada sustav nema jedinstveno rješenje. Naglasimo da je jednadžba rješena samo onda kada smo odredili cijeli skup rješenja!

PRIMJER 1.3.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Rješenje: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

NAPOMENA 1.4. Rješenja sustava se mogu provjeriti na www.wolframalpha.com

ZADATAK 1.1. a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24, \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 40 \end{aligned}$$

(nema rješenja)

b)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 3, \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Rješenje: $x_1 = t$, $x_2 = 4t - 9$, $x_3 = \frac{9}{2}t - \frac{21}{2}$, $t \in \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje: $x_1 = -t + s$, $x_2 = t$, $x_3 = s$, $s, t \in \mathbb{R}$.

ZADATAK 1.2. Odredite $h, k \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned}$$

ima

1. jedinstveno rješenje,

2. beskonačno mnogo rješenja,

3. nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.

Rješenje Rješavamo sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \quad / \cdot (-4) + II \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ (h-8)y &= 5 - 4k \end{aligned}$$

Ako je $h = 8$, onda za $5 - 4k = 0$, tj. $k = \frac{5}{4}$, sustav ima beskonačno mnogo rješenja oblika $x + 2y = \frac{5}{4}$ odakle slijedi da je $x = \frac{5}{4} - 2t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$.
Za $h = 8$ i $5 - 4k \neq 0$ sustav nema rješenja
Za $h \neq 8$ sustav ima jedinstveno rješenje dano sa

$$y = \frac{5-4k}{h-8}, \quad x = k - 2\frac{5-4k}{h-8}.$$

Zadatak 1.3. Odredite $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} 2\beta x + \quad \beta y + \quad \beta z &= 1 + \gamma \\ 2x + \quad y + \quad \beta z &= 1 \\ 4x + (2-\beta)y + (\beta^2 + 2\beta)z &= 2 + \gamma \end{aligned}$$

ima

1. jedinstveno rješenje,

2. beskonačno mnogo rješenja,

3. nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.

Rješenje

$$\begin{aligned} 2\beta x + \quad \beta y + \quad \beta z &= 1 + \gamma \\ 2x + \quad y + \quad \beta z &= 1 \\ 4x + (2-\beta)y + (\beta^2 + 2\beta)z &= 2 + \gamma \end{aligned}$$

Zamjena prve i druge jednadžbe.

$$\begin{aligned} 2x + \quad y + \quad \beta z &= 1 \\ 2\beta x + \quad \beta y + \quad \beta z &= 1 + \gamma \\ 4x + (2-\beta)y + (\beta^2 + 2\beta)z &= 2 + \gamma \end{aligned}$$

Množimo prvu jednadžbu s $-\beta$ i dodajemo drugoj. Zatim množimo prvu jednadžbu s -2 i dodajemo trećoj.

$$\begin{aligned} 2x + \quad y + \quad \beta z &= 1 \\ (\beta - \beta^2)z &= 1 + \gamma - \beta \\ -\beta y + \quad \beta^2 z &= \gamma \end{aligned}$$

Zamjena druge i treće jednadžbe.

$$\begin{aligned} 2x+ \quad y+ \quad & \beta z = 1 \\ -\beta y+ \quad & \beta^2 z = \gamma \\ (\beta-\beta^2)z &= 1+\gamma-\beta \end{aligned}$$

Sveli smo sustav na gornjetrokutasti. Sada gledamo slučajeve.

1) $\beta \neq 0, 1$. Tada možemo zadnju jednadžbu podijeliti s $\beta - \beta^2$ pa je

$$z = \frac{1+\gamma-\beta}{\beta-\beta^2}$$

odakle povratnom supstitucijom slijedi i da je

$$y = \frac{1+\gamma-\beta}{1-\beta} - \frac{\gamma}{\beta}, \quad x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\gamma-\beta}{1-\beta} + \frac{\gamma}{\beta} - \frac{1+\gamma-\beta}{1-\beta}\right).$$

2) a) $\beta = 0$. Tada zbog treće jednadžbe mora vrijediti $0 = 1 + \gamma$. Dakle, ako je $\gamma \neq -1$, nema rješenja. Ako je $\gamma = -1$, onda treća jednadžba glasi $0 = 0$. No, druga jednadžba je $0 = -1$ pa ni u ovom slučaju nema rješenja.

b) $\beta = 1$. Tada mora biti $0 = \gamma$ pa ako je $\gamma \neq 0$, nema rješenja. Ako je $\gamma = 0$, onda dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2x+ \quad y+ \quad & z = 1 \\ -y+ \quad & z = 0 \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

koji ima beskonačno mnogo rješenja

$$x = \frac{1}{2} - t, \quad y = t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, za $\beta \notin \{0, 1\}$ sustav ima jedinstveno rješenje. Za $\beta = 0$ ili $\beta = 1$, $\gamma \neq 0$ sustav nema rješenja. Za $\beta = 1$, $\gamma = 0$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja. □

1.3 Radijvektori u ravnini

Dana je ravnina E^2 koju shvaćamo kao skup točaka, u E^2 je dan pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki O. Svakoj točki $A \in E^2$ pridružujemo **radijvektor** $\overrightarrow{OA}$, tj. strelicu s početkom u O i završetkom u točki A.
Skup svih radijvektora u ravnini označavamo s $V^2(O)$. Radijvektor $\overrightarrow{OO}$ zovemo **nulvektor** i označavamo s $\vec{0}$. **Modul** od $\overrightarrow{OA}$ označavamo s $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ i definiramo kao duljinu dužine $\overline{OA}$. Radijvektor $\vec{0}$ je jedini vektor čiji modul je 0. **Smjer** od $\overrightarrow{OA}$ definira se kao pravac OA (smjer nulvektora se ne definira). Kažemo da su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ **kolinearni** ako O, A i B leže na istom pravcu. Nulvektor je kolinearan sa svakim radijvektorom.
Neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ kolinearni i različiti od nulvektora. Kažemo da su **jednako orijentirani** ako A i B leže s iste strane točke O na pravcu OAB. Inače kažemo da su **suprotno orijentirani**.

Svaki netrivijalni radijvektor je jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom. Za radijvektor $\vec{a}$ definiramo **suprotan radijvektor** $-\vec{a}$ kao radijvektor koji ima jednak modul i smjer kao $\vec{a}$, ali suprotnu orijentaciju.
Zbrajanje radijvektora. Neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nekolinearni. Tada $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ definiramo kao radijvektor $\overrightarrow{OC}$, pri čemu je C jedinstvena točka ravnine sa svojstvom da je četverokut $OACB$ paralelogram. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, onda ćemo $\vec{a}+\vec{b}$ definirati na sljedeći način:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in V^2(O), \tag{1.7}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}, \quad \forall \vec{a} \neq \vec{0}. \tag{1.8}$$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, netrivijalni i nisu jedan drugome suprotni, zbor $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo kao radijvektor koji ima isti smjer kao $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednako orijentirani, $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo tako da ima modul $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ i orijentaciju istu kao $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotne orijentacije te ako je $|\vec{a}|>|\vec{b}|$, onda $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo kao radijvektor čiji modul iznosi $|\vec{a}|-|\vec{b}|$, kolinearan je s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, i ima istu orijentaciju kao $\vec{a}$. Ako je $|\vec{a}|<|\vec{b}|$, definicija je analogna, samo je orijentacija zbroja ista kao $\vec{b}$. Skicirati!
Svakoj točki $A \in E^2$ možemo pridružiti par koordinata u odabranom pravokutnom koordinatnom sustavu.

Propozicija 1.5. *$A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2) \Longrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$, gdje je $C=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.*

Propozicija 1.6. *Zbrajanje radijvektora ima sljedeća svojstva:*

(a) $\forall \vec{a},\vec{b} \in V^2(O)$ $\vec{a}+\vec{b} \in V^2(O)$.

(b) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

(c) $\exists \vec{0} \in V^2(O)$ *tako da je* $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$, $\forall \vec{a} \in V^2(O)$.

(d) $\forall \vec{a} \in V^2(O)$ $\exists -\vec{a} \in V^2(O)$ *takav da je* $\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$.

(e) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, $\forall \vec{a},\vec{b} \in V^2(O)$.

Definiramo još jednu operaciju nad radijvektorima koju zovemo **množenje radijvektora skalarom**.
DEFINICIJA 1.7. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\vec{v} \in V^2(O)$. Radijvektor $\alpha\vec{v}$ definiramo kao radijvektor čiji je

- modul $|\alpha\vec{v}|=|\alpha|\cdot|\vec{v}|$,
- smjer isti kao i smjer od $\vec{v}$,
- $\vec{v}$ i $\alpha\vec{v}$ su iste (suprotne) orijentacije ako je $\alpha>0$ ($\alpha<0$).

Ako je $\alpha=0$ ili $\vec{v}=\vec{0}$, tada je $\alpha\vec{v}=\vec{0}$ pa u tom slučaju ne govorimo o smjeru i orijentaciji.
Vrijedi da je

$$1\cdot\vec{v}=\vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in V^2(O), \tag{1.9}$$

$$(-1)\cdot\vec{v}=-\vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in V^2(O). \tag{1.10}$$

Propozicija 1.8. *$\alpha \in \mathbb{R}$, $T=(x,y) \Longrightarrow \alpha\cdot\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OT'}$, gdje je $T'=(\alpha x,\alpha y)$.*

Propozicija 1.9. *Neka je $\vec{a} \in V^2(O)$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Za svaki $\vec{b} \in V^2(O)$ kolinearan s $\vec{a}$ postoji jedinstveni $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.*

Vrijedi i obrat (direktno iz definicija): svaki vektor $\vec{b}$ oblika $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, je kolinearan s $\vec{a}$.

NAPOMENA 1.10. Vrijedi i sljedeće: vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoji netrivijalan izbor koeficijenata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} = \vec{0}$. Za ovo posljednje kažemo još da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ **linearno zavisni**.
Ili: vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako je jednakost $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ ispunjena samo na trivijalan način, tj. za $\alpha = \beta = 0$. Za ovo kažemo da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ **linearno nezavisni**.
Ili: vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako ($\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \implies \alpha = \beta = 0$).

Propozicija 1.11. *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$ nekolinearni vektori. Za svaki $\vec{c} \in V^2(O)$ postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.*

Drugim riječima: svaki vektor $\vec{c} \in V^2(O)$ moguće je na jedinstven način prikazati kao linearnu kombinaciju nekolinearnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kažemo da je $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ **baza** za $V^2(O)$.
Bilo koja dva nekolinearna vektora čine bazu za $V^2(O)$.

ZADATAK 1.4. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, pri čemu je $A = (1, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -3)$. Pokažite da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ nisu kolinearni te prikažite $\vec{c}$ kao njihovu linearnu kombinaciju.

RJEŠENJE Zadatak ćemo riješiti na nekoliko načina:

1) računamo koeficijente smjera pravaca OA i OB:

$$k_{OA} = \frac{2-0}{1-0} = 2, \quad k_{OB} = \frac{4-0}{1-0} = 4.$$

Kako koeficijenti smjera nisu jednaki, slijedi da $\vec{a}$, $\vec{b}$ nisu kolinearni.

2) pokušajmo vektor $\vec{b}$ zapisati kao $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Prema propoziciji 1.8 slijedi da je $(1, 4) = (\lambda, 2\lambda)$. Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ 2\lambda &= 4 \end{aligned}$$

koji nema rješenja. Dakle, ne postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

3) Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ su kolinearni akko postoji netrivijalan izbor koeficijenata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Slijedi da je $(\alpha + \beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0)$. Dobivamo 2x2 sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + 4\beta &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = 0$. Dakle, $\vec{a}, \vec{b}$ su nekolinearni.

Izrazimo sada vektor $\vec{c}$ kao njihovu linearnu kombinaciju. Propozicija 1.11 nam garantira da postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Izjednačavanjem krajnjih točaka dobivamo

$$(\alpha + \beta, 2\alpha + 4\beta) = (-1, -3)$$

što daje sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -1 \\ 2\alpha + 4\beta &= -3 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Dakle, $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. □

Označimo s $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $I = (1, 0)$, i $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $J = (0, 1)$. Tada je očito za svaki $T = (x, y) \in E^2$

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j}. \tag{1.11}$$

Nekolinearne vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ nazivamo **standardnom ili kanonskom bazom** za $V^2(O)$.

DZ 1.1. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, pri čemu je $A = (1, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -3)$, $D = (0, 1)$. Pokažite radijvektor $\vec{d}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

DZ 1.2. Isti vektori kao u prethodnom zadatku, samo se ovdje traži da se prikaže vektor $\vec{d}$ kao $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, pri čemu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Zadatak 1.5. Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni (linearno nezavisni) vektori u $V^2(O)$. Odredite za koje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vektori

$$\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \beta\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

također nekolinearni (linearno nezavisni).

Rješenje Pogledajmo linearnu kombinaciju

$$A(\vec{a} + \beta\vec{b}) + B(\beta\vec{a} + \alpha\vec{b}) = \vec{0}.$$

Želimo da je jednakost zadovoljena samo za $A = B = 0$. Prethodni izraz možemo zapisati u obliku

$$(A + \beta B)\vec{a} + (\beta A + \alpha B)\vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni vektori po pretpostavci, tada mora biti

$$\begin{aligned} A + \beta B &= 0 \\ \beta A + \alpha B &= 0 \end{aligned}$$

Ovo shvatimo kao sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama A, B. To je **homogeni sustav** jer su slobodni članovi na desnoj strani jednaki nuli. Homogeni sustav uvijek ima rješenje, i to trivijalno rješenje ($A = B = 0$). No, mi želimo da mu je to i jedino rješenje. Kada prethodni sustav ima jedinstveno rješenje?
Pomnožimo li prvu jednadžbu s $-\beta$ i dodamo drugoj, dobivamo

$$\begin{aligned} A + \beta B &= 0 \\ (\alpha - \beta^2)B &= 0 \end{aligned}$$

Vrijedi da je $B = 0$ jedino rješenje ako i samo ako je $\alpha - \beta^2 \neq 0$. Ako je $B = 0$, onda uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo da je i $A = 0$, tj. traženu jedinstvenost rješenja.
Dakle, navedeni vektori su linearno nezavisni ako i samo ako je $\alpha - \beta^2 \neq 0$.

1.4 Radijvektori u prostoru

Definicije su analogne onima za radijvektore u ravnini pa izostavljamo detalje.
E^3 je trodimenzionalni prostor sa točkovnom strukturom. U njemu zadajemo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u O i skup svih radijvektora u prostoru označavamo s $V^3(O)$. I ovdje imamo identifikaciju radijvektora s njihovim završnim točkama, odnosno uređenim trojkama njihovih pravokutnih koordinata.

$$\overrightarrow{OT} \longleftrightarrow T \longleftrightarrow (x, y, z).$$

Sljedeće su definicije iste kao i za $V^2(O)$:

- modul
- smjer
- orijentacija
- suprotni vektor
- zbrajanje vektora
- množenje vektora skalarom

Prve tri točke jedinstveno određuju vektor iz $V^3(O)$.
I ovdje imamo algebarske relacije za operacije zbrajanja i množenja skalarom

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \tag{1.12}$$
$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z). \tag{1.13}$$

Nadalje, zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom imaju ista svojstva kao i u $V^2(O)$.
Ovdje imamo jedan novi pojam koji nismo imali u $V^2(O)$.

DEFINICIJA 1.12. Neka je $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, $n \geq 2$, konačan skup radijvektora u $V^3(O)$, $\vec{v}_i = \overrightarrow{OT_i}$, $i = 1, \dots, n$. Kažemo da su vektori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ **komplanarni** ako postoji ravnina kroz ishodište koja sadrži sve završne točke T_i, $i = 1, \dots, n$. U protivnom kažemo da su ti vektori **nekomplanarni**.

Dva su vektora uvijek komplanarna. (Ako su nekolinearni, onda postoji *jedinstvena* ravnina kroz točke O, T_1, T_2).
Tri vektora mogu i ne moraju biti komplanarni. Na primjer, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nisu komplanarni, dok $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}+\vec{j}\}$ jesu. Skica.

Propozicija 1.13. *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3(O)$ proizvoljni nekolinearni vektori. Za svaki vektor $\vec{v} \in V^3(O)$* komplanaran *s $\vec{a}, \vec{b}$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi*

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Propozicija 1.14. *Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3(O)$ proizvoljni nekomplanarni vektori. Za svaki radijvektor $\vec{v} \in V^3(O)$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi*

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

NAPOMENA 1.15. U $V^3(O)$ tri nekomplanarna vektora čine bazu (u smislu da se svaki radijvektor može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija tih vektora).

NAPOMENA 1.16. Tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su nekomplanarni (dakle, čine bazu) ako i samo ako vrijedi

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

ZADATAK 1.6. Provjerite čine li vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, gdje je

a) $A = (1, 0, -1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 1, 1)$,

b) $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (0, 1, 1)$,

c) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$

bazu za $V^3(O)$.

RJEŠENJE Svugdje krećemo od jednakosti

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$$

a) Po svojstvima zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom za završne točke dobivamo da vrijedi

$$(\alpha + \beta, 2\beta + \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma) = (0, 0, 0).$$

Uređene trojke su jednake ako i samo ako je

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = 0 \\ -\alpha & + & 3\beta + & & \gamma & = 0 \end{array}$$

Rješavamo sustav elementarnim transformacijama. Dodajemo najprije prvu jednadžbu trećoj.

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = 0 \\ & & 4\beta + & & \gamma & = 0 \end{array}$$

Zatim množimo drugu jednadžbu s -2 i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = 0 \\ & & & - & \gamma & = 0 \end{array}$$

Povratnom supstitucijom dobivamo jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dakle, dani vektori čine bazu.

b)

$$(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma) = (0, 0, 0),$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = 0 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = 0 \end{array}$$

Ovdje imamo dvije jednake jednadžbe pa se sustav reducira na sustav od 2 jednadžbe s 3 nepoznanice koji ne može imati jedinstveno rješenje.

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = 0 \end{array}$$

Rješenje ovog sustava je $\alpha = t$, $\beta = -t$, $\gamma = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Na primjer za $t = 1$ dobivamo $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ pa je $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, tj. $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ pa vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne čine bazu za $V^3(O)$ (komplanarni su).

c)

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$$

što povlači da je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ pa navedeni vektori čine bazu. To su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ koji su jedinični radijvektori u smjeru pozitivnog dijela koordinatnih osi. Tu bazu zovemo **standardna ili kanonska baza** za $V^3(O)$.

Uočite: ako je $T = (x, y, z)$, onda je

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.14}$$

Zadatak 1.7. Prikažite vektor $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $D = (1, -1, -4)$ kao linearnu kombinaciju vektora iz prethodnog zadatka.

Rješenje

a) $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ vodi na jednakost završnih točaka

$$(\alpha + \beta, 2\beta + \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma) = (1, -1, -4)$$

što je ekvivalentno sustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & & 2\beta+ & & \gamma & = & -1 \\ -\alpha & + & 3\beta+ & & \gamma & = & -4 \end{array}$$

Zbrojimo prvu i treću jednadžbu

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & & 2\beta+ & & \gamma & = & -1 \\ & & 4\beta+ & & \gamma & = & -3 \end{array}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu s -2 i dodamo trećoj

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & & 2\beta+ & & \gamma & = & -1 \\ & & & & -\gamma & = & -1 \end{array}$$

Povratnom supstitucijom dobivamo jedinstveno rješenje $\gamma = 1$, $\beta = -1$, $\alpha = 2$. Dakle,

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

b)

$$(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma) = (1, -1, -4),$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ \alpha & + & 2\beta+ & & \gamma & = & -1 \\ \alpha & + & 2\beta+ & & \gamma & = & -4 \end{array}$$

Izjednačavanjem dvije zadnje jednadžbe dobivamo $-1 = -4$ što je kontradikcija. Dakle, sustav nema rješenja.

Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne čine bazu za $V^3(O)$, nego razapinju jednu ravninu kroz ishodište. Vektor $\vec{d}$ nije komplanaran s tom ravninom.

Ako uzmemo $\vec{d} = (1, -1, -1)$, tada bismo $\vec{d}$ mogli prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ali ne na jedinstven način

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ \alpha & + & 2\beta+ & & \gamma & = & -1 \\ \alpha & + & 2\beta+ & & \gamma & = & -1 \end{array}$$

Rješenja ovog sustava su $\alpha = t$, $\beta = 1 - t$, $\gamma = -3 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Jedno rješenje je, na primjer, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$.

c)

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -4)$$

što ima jedinstveno rješenje $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$.

Zadatak 1.8. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni vektori u $V^3(O)$. Odredite za koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vektori

$$\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{b} + \beta\vec{c}, \vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{c}$$

također nekomplanarni.

Rješenje Pogledajmo linearnu kombinaciju

$$A\left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right) + B\left(\vec{b} + \beta\vec{c}\right) + C\left(\vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{c}\right) = \vec{0}.$$

Želimo dobiti $A = B = C = 0$. Napišimo prethodni izraz u obliku

$$(A + C)\vec{a} + (A\alpha + B + C\beta)\vec{b} + (B\beta + \alpha C)\vec{c} = \vec{0}.$$

Kako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, vrijedi

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & & & C & = & 0 \\ \alpha A & + & B+ & & \beta C & = & 0 \\ & & \beta B+ & & \alpha C & = & 0 \end{array}$$

Prethodne jednadžbe shvatimo kao sustav za A, B, C. Želimo da taj sustav ima jedinstveno rješenje dano s $A = B = C = 0$. Rješavamo sustav. Pomnožimo prvu jednadžbu s $-\alpha$ i dodajmo drugoj.

$$\begin{array}{rcrlcl} A & + & & C & = & 0 \\ & & B+ & (\beta - \alpha)C & = & 0 \\ & & \beta B+ & \alpha C & = & 0 \end{array}$$

Sada pomnožimo drugu jednadžbu s $-\beta$ i dodajmo trećoj.

$$\begin{array}{rcrrcl} A & + & & C & = & 0 \\ & & B+ & (\beta - \alpha)C & = & 0 \\ & & & \left(\alpha - \beta^2 + \alpha\beta\right)C & = & 0 \end{array}$$

Vidimo da je $A = B = C = 0$ jedino rješenje ako i samo ako je $\alpha - \beta^2 + \alpha\beta \neq 0$.

Zadatak 1.9. (a) Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$ i $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ komplanarni?

(b) Postoji li vektor $\vec{d} \in V^3(O)$ (koji ne ovisi o λ) takav da su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ nekomplanarni za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$?

Rješenje

(a) Želimo da $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ ima netrivijalna rješenja. Uvrstimo vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\alpha\left(\vec{i} + \lambda\vec{k}\right) + \beta\left(2\vec{i} + \lambda\vec{j}\right) + \gamma\left(-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) = \vec{0},$$
$$(\alpha + 2\beta - \gamma)\vec{i} + (\lambda\beta - 2\gamma)\vec{j} + (\lambda\alpha + \gamma)\vec{k} = \vec{0}.$$

Kako su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ linearno nezavisni (nekomplanarni), slijedi da je

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta - & & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta - & & 2\gamma & = & 0 \\ \lambda\alpha & & & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Množimo prvu jednadžbu s $-\lambda$ i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta - & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta - & 2\gamma & = & 0 \\ & & -2\lambda\beta + & (\lambda+1)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Množimo drugu jednadžbu s 2 i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta - & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta - & 2\gamma & = & 0 \\ & & & (\lambda-3)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Gledamo slučajeve

1) $\boxed{\lambda = 3}$ Imamo sustav

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta - & \gamma & = & 0 \\ & & 3\beta - & 2\gamma & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

koji ima rješenje $\alpha = -\frac{1}{3}t$, $\beta = \frac{2}{3}t$, $\gamma = t$, $t \in \mathbb{R}$.
Za $\lambda = 3$ vektori su komplanarni.

2) $\boxed{\lambda \neq 3}$ U ovom slučaju treću jednadžbu možemo podijeliti s $\lambda - 3$ i dobivamo

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta - & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta - & 2\gamma & = & 0 \\ & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Ako pomnožimo treću jednadžbu s 2 i dodamo drugoj te dodamo treću jednadžbu prvoj, dobivamo

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta & & = & 0 \\ & & \lambda\beta & & = & 0 \\ & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Sada opet imamo dva slučaja

2a) $\boxed{\lambda = 0}$ Imamo sustav

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta & & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

čije rješenje je $\alpha = -2t$, $\beta = t$, $\gamma = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Dakle, i za $\lambda = 0$ vektori su komplanarni.

2b) $\boxed{\lambda \neq 0}$ Imamo sustav

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 \\ & & \beta & & & = & 0 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Konačno, za $\lambda \neq 0, 3$ vektori su nekomplanarni, a za $\lambda = 0$ i $\lambda = 3$ su komplanarni.

(b) Pitamo se postoje li $x, y, z \in \mathbb{R}$ takvi da za $\vec{d} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ vektorska jednadžba $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{d} = \vec{0}$ ima samo trivijalno rješenje za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem vektora dobivamo

$$\alpha\left(\vec{i}+\lambda\vec{k}\right) + \beta\left(2\vec{i}+\lambda\vec{j}\right) + \gamma\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right) = \vec{0},$$
$$(\alpha+2\beta+x\gamma)\vec{i} + (\lambda\beta+y\gamma)\vec{j} + (\lambda\alpha+z\gamma)\vec{k} = \vec{0}.$$

Slijedi da je

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta+ & x\gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta+ & y\gamma & = & 0 \\ \lambda\alpha & & + & z\gamma & = & 0 \end{array}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s $-\lambda$ i dodajmo je trećoj.

$$\begin{array}{rcrlcl} \alpha & + & 2\beta+ & x\gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta+ & y\gamma & = & 0 \\ & & -2\lambda\beta+ & (z-x\lambda)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu s 2 i dodajmo trećoj

$$\begin{array}{rcrlcl} \alpha & + & 2\beta+ & x\gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta+ & y\gamma & = & 0 \\ & & & (z-x\lambda+2y)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Što ako je $\lambda = 0$? Tada imamo sustav

$$\begin{array}{rcrlcl} \alpha & + & 2\beta+ & x\gamma & = & 0 \\ & & & y\gamma & = & 0 \\ & & & (z+2y)\gamma & = & 0 \end{array}$$

odakle ne možemo dobiti jedinstveno rješenje.

Zašto je $\lambda = 0$ problematično? Jer za $\lambda = 0$ imamo vektore $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{i}$ koji su kolinearni pa će svaki treći vektor $\vec{d}$ ležati u istoj ravnini s njima. (Ako odmah primijetite kolinearnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ za $\lambda = 0$, prethodni raspis nije potreban).

1.5 Radijvektorska interpretacija sustava

1.5.1 Sustavi 2x2

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Uvođenjem vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $A = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $B = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $C = (c_1, c_2)$, prethodni sustav možemo zapisati kao

$$(c_1, c_2) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) \tag{1.16}$$

što se može zapisati i preko vektora kao

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \tag{1.17}$$

i obratno, jednadžbu (1.17) raspisivanjem svodimo na sustav (1.15). Analitičko–geometrijska interpretacija tretirala je sustav "po retcima", dok na ovaj način sustav tretiramo "po stupcima".
Vrijedi sljedeće:

1. Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni, onda sustav (1.15) ima jedinstveno rješenje.
2. Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni i
   (i) $\vec{c}$ kolinearan s njima, onda sustav (1.15) ima beskonačno mnogo rješenja.
   (ii) $\vec{c}$ nije s njima kolinearan, onda sustav (1.15) nema rješenja.

Primjer 1.17. (a)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

(a) Sustav ima jedinstveno rješenje $x = y = 1$ jer su vektori $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ očito nekolinearni.

(b) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja oblika $x = t$, $y = 2 - t$, $t \in \mathbb{R}$. Vektori $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ su očito kolinearni, a za vektor $\vec{c}$ vrijedi $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.

(c) Sustav nema rješenje jer je $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = \vec{b}$, dok $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = 2(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ nije s njima kolinearan.

Definicija 1.18. Definirajmo **determinantu sustava** (1.15) kao

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

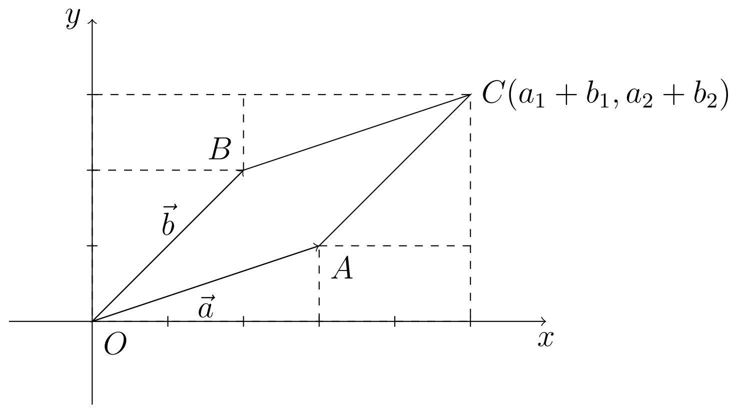
Rješavanjem sustava (1.15) možemo pokazati da sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$. Tada je rješenje dano u obliku

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Time smo dobili i kriterij kada su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ nekolinearni. Dakle, vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ su nekolinearni ako i samo ako je

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Prethodnu tvrdnju možemo potkrijepiti i geometrijski. Naime, vrijedi da je $\left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$ površina paralelograma razapetog s $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Slika 1.1: Površina paralelograma razapetog s radijvektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

Formulu za površinu paralelograma ćemo izvesti tako da paralelogram smjestimo u pravokutnik minimalne površine kojemu su stranice paralelne s osima, i od površine tog pravokutnika oduzmemo površine odgovarajućih pravokutnih trokuta i pravokutnika. Konkretno:

$$\begin{aligned} P_{OACB} &= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - \frac{1}{2}a_1a_2 - b_1a_2 - \frac{1}{2}b_1a_2 - \frac{1}{2}a_1a_2 - b_1a_2 - \frac{1}{2}b_1b_2 \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 = \det(\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned}$$

Primijetimo da je predznak pozitivan ako točke A i B odaberemo tako da vrhove O, A, B obilazimo u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (u pozitivnom smjeru). Ako je poredak vrhova takav da ih obilazimo u smjeru kazaljke na satu, onda bi $\det(\vec{a}, \vec{b})$ bila negativna.

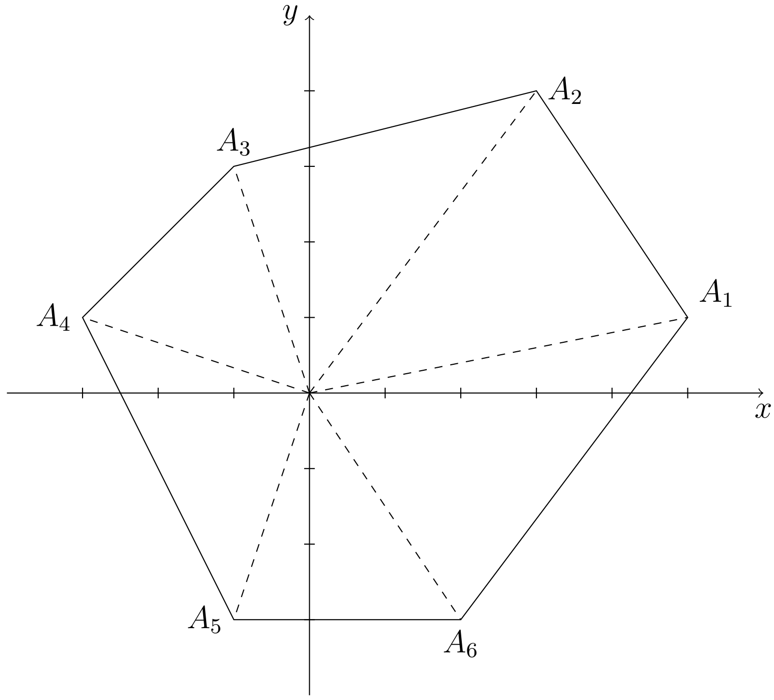
Želimo li odrediti površinu trokuta, možemo se poslužiti formulom za površinu paralelograma. Uzmimo da je trokut određen vrhovima O, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$. Tada je površina tog trokuta pola površine paralelograma određenog radijvektorima $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$. Slijedi da je

$$P_{OBC} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|x_2y_3 - x_3y_2\right|. \tag{1.18}$$

Ako trokutu nijedan vrh nije u ishodištu, onda ga možemo translatirati tako da mu se npr. vrh A nalazi u ishodištu pa dobivamo da površina trokuta određenog vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ iznosi:

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|. \end{aligned}$$

Pomoću formule (1.18) možemo izvesti formulu za površinu bilo kojeg konveksnog mnogokuta u ravnini. Pretpostavimo da imamo konveksan mnogokut kojemu se ishodište nalazi u unutrašnjosti (kao na slici 1.2).



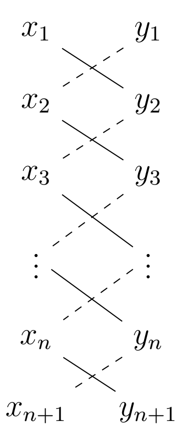
Slika 1.2: Podjela mnogokuta na trokute

Površina mnogokuta je apsolutna vrijednost sume površina trokuta OA_iA_{i+1}, $i = 1, \dots, n$ (ako su točke A_i odabrane tako da je obilazak mnogokuta u pozitivnom smjeru, onda je ta suma pozitivna). Radi jednostavnosti oznaka, stavit ćemo da je $A_{n+1} := A_1$. Koristeći formulu (1.18) dobivamo da je

$$P = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} \det\begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right|. \tag{1.19}$$

Pritom nam opet poredak vrhova mnogokuta govori koji će biti predznak izraza pod apsolutnom vrijednosti. Ako je obilazak vrhova u pozitivnom smjeru, izraz je pozitivan, a ako je u negativnom smjeru, izraz će biti negativan.

Formula (1.19) u literaturi se može pronaći pod nazivom *shoelace formula* jer se može vizualno predočiti tako da koordinate vrhova A_i stavimo svaku u svoj redak



i onda faktore $x_i y_{i+1}$ (koji su predočeni punom linijom) uzimamo s predznakom $+$, a faktore $y_i x_{i+1}$ (isprekidana linija) uzimamo s predznakom $-$, pa ih sve zbrojimo.
Komentirajmo na kraju i pretpostavku da je ishodište unutar mnogokuta. Ona nam zapravo nije potrebna. Jasno je da je svejedno gdje se točno nalazi ishodište ako se nalazi unutar mnogokuta, ali ishodište može biti i izvan mnogokuta i formula (1.19) i dalje vrijedi.
Formula (1.19) vrijedi i za mnogokute koji nisu konveksni. Ostavljamo vam da sami o tome razmislite.

Zadatak 1.10. Odredite $h, k \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned}$$

ima

1. jedinstveno rješenje,
2. beskonačno mnogo rješenja,
3. nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.

Rješenje

(a) Sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} \neq 0$ ako i samo ako je $h - 8 \neq 0$. Tada je (kao i prije) rješenje dano s

$$x = \frac{kh - 10}{h - 8}, \quad y = \frac{5 - 4k}{h - 8}.$$

(b) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} = h - 8 = 0$ i $\vec{c}$ je kolinearan s $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kolinearnost možemo opet provjeriti preko determinante. Zadnji uvjet je ekvivalentan tome da je

$$0 = \det(\vec{a}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4k.$$

Dakle, sustav ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je $h = 8$ i $k = \frac{5}{4}$.

To smo mogli vidjeti i rješavajući sustav.

(c) Sustav nema rješenja ako i samo ako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$ ako i samo ako je $h = 8$, $k \neq \frac{5}{4}$.

Naravno, zadnji uvjet smo mogli dobiti i iz prva dva slučaja kao preostale vrijednosti za h i k.

1.5.2 Sustavi 3x3

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Uvođenjem vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{v} = \overrightarrow{OD}$, $D = (d_1, d_2, d_3)$, kao i prije dobivamo

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \tag{1.21}$$

Svako rješenje (x, y, z) sustava (1.20) ujedno je i rješenje vektorske jednadžbe (1.21), i obratno. Analizirajmo sustav (1.20) razmatrajući geometrijski položaj vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{v}$:

(A) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, onda rješenje sustava postoji i jedinstveno je.

(B) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni i nekolinearni, imamo sljedeće slučajeve

- (B1) Ako $\vec{v}$ nije komplanaran s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje sustava ne postoji.
- (B2) Ako je $\vec{v}$ komplanaran s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje postoji i skup rješenja je beskonačan te ovisi o jednom slobodnom parametru.

(C) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ kolinearni, onda imamo sljedeće slučajeve

- (C1) Ako $\vec{v}$ nije kolinearan s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje sustava ne postoji.
- (C2) Ako je $\vec{v}$ kolinearan s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje sustava postoji. Skup rješenja je beskonačan i ovisi o dva slobodna parametra.

Zadatak 1.11. Riješite sljedeće sustave i kod svakog vektorskom interpretacijom ustanovite razloge (ne)postojanja rješenja. Ako rješenje postoji, opravdajte strukturu skupa rješenja geometrijskim (vektorskim) argumentima.

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 40 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje

(a) Uvedimo vektore $\vec{a} = (2,4,3)$, $\vec{b} = (4,5,1)$, $\vec{c} = (6,6,-2)$, $\vec{v} = (18,24,4)$. Riješimo sustav metodom suprotnih koeficijenata. Dobivamo jedinstveno rješenje $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Razlog tome je što su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni što se može utvrditi direktnom provjerom. Jednadžba

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

daje isti sustav, samo homogen

$$\begin{aligned} 2\alpha &+ 4\beta + 6\gamma = 0 \\ 4\alpha &+ 5\beta + 6\gamma = 0 \\ 3\alpha &+ \beta - 2\gamma = 0 \end{aligned}$$

Rješavajući ga na isti način, dobivamo $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(b) Sustav nema rješenja.

Vektorska interpretacija: $\vec{a} = (2,4,2)$, $\vec{b} = (4,5,7)$, $\vec{c} = (6,6,12)$ su komplanarni, ali $\vec{v}$ nije s njima komplanaran. Na primjer, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ daje sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha + 4\beta &= 6 \\ 4\alpha + 5\beta &= 6 \\ 2\alpha + 7\beta &= 12 \end{aligned}$$

koji ima rješenje $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Dakle, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ su komplanarni. Da $\vec{v}$ nije s njima komplanaran, dobijemo upravo rješavajući početni sustav.

(c) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Na primjer, $x_1 = 3 + \frac{2}{9}t$, $x_2 = \frac{8}{9}t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Mogli smo i drugačije izabrati slobodni parametar. Na primjer, $x_1 = 3 - \frac{1}{4}t$, $x_2 = t$, $x_3 = \frac{9}{8}t$, $t \in \mathbb{R}$.

Vektorska interpretacija: vektori $\vec{a} = (3,2,-1)$, $\vec{b} = (6,-5,16)$, $\vec{c} = (-6,4,-14)$ su komplanarni jer je

$$2\vec{a} + 8\vec{b} + 9\vec{c} = \vec{0}.$$

Nadalje, $\vec{v} = 3\vec{a}$ pa je $\vec{v}$ komplanaran s $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. I odavde možemo doći do skupa rješenja. Na primjer,

$$\vec{v} = 3\vec{a} = 3\vec{a} + z\vec{c} - z\vec{c} = 3\vec{a} - z\left(-\frac{2}{9}\vec{a} - \frac{8}{9}\vec{b}\right) + z\vec{c} = \vec{a}\underbrace{\left(3 + \frac{2}{9}z\right)}_{x_1} + \vec{b}\underbrace{\left(\frac{8}{9}z\right)}_{x_2} + \underbrace{z}_{x_3}\vec{c}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

(d) Uočimo da se radi o homogenom sustavu pa on sigurno ima rješenje. Rješavanjem sustava dobivamo $x_1 = -\frac{4}{5}t$, $x_2 = \frac{9}{5}t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Interpretacija je ista kao i u prethodnom zadatku.

Za vektore $\vec{a} = (1,4,6)$, $\vec{b} = (1,-1,1)$, $\vec{c} = (-1,5,3)$ vrijedi

$$4\vec{a} - 9\vec{b} = 5\vec{c}$$

pa su oni komplanarni i nikoja dva nisu kolinearna. Očito je

$$\vec{v} = \vec{0} = 4\vec{a} - 9\vec{b} - 5\vec{c}.$$

DZ 1.3. Odredite za koje su $t \in \mathbb{R}$ vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ nekomplanarni. (Rješenje: $t \neq 1$)

DZ 1.4. Odredite za koje su $p \in \mathbb{R}$ vektori $\vec{a} = (p-1)\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = (p+4)\vec{i} + (p-2)\vec{j}$ kolinearni. (Rješenje: $p = -1, 6$)

DZ 1.5. Jesu li vektori $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ komplanarni? (Rješenje: Ne)

Poglavlje 2

Vektorski prostori

Definicija 2.1. Ako su na skupu $V \neq \emptyset$ definirane operacije $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ sa svojstvima

(1) $\forall a, b \in V \ a + b \in V$,

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in V$,

(3) $\exists 0 \in V$ t.d. $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in V$,

(4) $\forall a \in V \ \exists(-a) \in V$ t.d. $a + (-a) = -a + a = 0$,

(5) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in V$,

(6) $\forall \alpha \in F$, $\forall a \in V$, $\alpha a \in V$,

(7) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$,

(8) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$,

(9) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a, b \in V$,

(10) $1 \cdot a = a$, $\forall a \in V$,

kažemo da je $(V, +, \cdot)$ realni ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$), odnosno kompleksni ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) **vektorski prostor**.

Napomena 2.2. U svakom vektorskom prostoru još vrijedi

a) $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ili $x = 0$

b) $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$

c) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$

d) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

Primjer 2.3 (Standardni primjeri).

a) $V^2(O)$ i $V^3(O)$ su vektorski prostori nad $\mathbb{R}$ s obzirom na zbrajanje radijvektora i množenje radijvektora skalarom kako smo prethodno definirali.

b) Sami skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ uz uobičajeno zbrajanje brojeva i množenje skalarom po koordinatama.

c) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

d) $M_{mn}(\mathbb{F})$

e) $\mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog od n

f) $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma

Zadatak 2.1. Dokažite da je $V = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ realni vektorski prostor uz operacije

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2), \qquad \alpha(x, y) = (x^\alpha, y^\alpha).$$

Rješenje Moramo pokazati da vrijede svojstva (1)–(10) iz Definicije 2.1.

(1) Vrijedi jer je $xy > 0$ za $x > 0$ i $y > 0$.

(2)

$$\begin{aligned}((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1x_2, y_1y_2) + (x_3, y_3) = ((x_1x_2)x_3, (y_1y_2)y_3) \\ &= (x_1(x_2x_3), y_1(y_2y_3)) = (x_1, y_1) + (x_2x_3, y_2y_3) \\ &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))\end{aligned}$$

(3) Neutralni element za zbrajanje je $(1, 1)$.

(4) Aditivni inverz elementa (x, y) je $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

(5) Komutativnost očito vrijedi.

(6) Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x > 0$ je $x^\alpha > 0$.

(7) Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $(x, y) \in V$ imamo

$$\alpha\left(\beta(x, y)\right) = \alpha\left(\left(x^\beta, y^\beta\right)\right) = \left(\left(x^\beta\right)^\alpha, \left(y^\beta\right)^\alpha\right) = \left(x^{\alpha\beta}, y^{\alpha\beta}\right) = (\alpha\beta)(x, y).$$

(8) Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $(x, y) \in V$ imamo

$$(\alpha + \beta)(x, y) = \left(x^{\alpha+\beta}, y^{\alpha+\beta}\right) = \left(x^\alpha x^\beta, y^\alpha y^\beta\right) = (x^\alpha, y^\alpha) + \left(x^\beta, y^\beta\right) = \alpha(x, y) + \beta(x, y).$$

(9) Za $\alpha \in \mathbb{R}$ i $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$ imamo

$$\begin{aligned}\alpha\left((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right) &= \alpha(x_1x_2, y_1y_2) = \left((x_1x_2)^\alpha, (y_1y_2)^\alpha\right) = (x_1^\alpha x_2^\alpha, y_1^\alpha y_2^\alpha) \\ &= (x_1^\alpha, y_1^\alpha) + (x_2^\alpha, y_2^\alpha) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2).\end{aligned}$$

(10) Za svaki $(x, y) \in V$ vrijedi

$$1 \cdot (x, y) = \left(x^1, y^1\right) = (x, y).$$

Zadatak 2.2. Provjerite da je $M_{mn}(\mathbb{F})$ vektorski prostor.

Zadatak 2.3. Provjerite da je $\mathbb{C}^n$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ uz standardno definirane operacije. Oznaka: $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

Zadatak 2.4. U $\mathbb{R}^2$ ostavimo standardno zbrajanje i uvedemo novo množenje skalarom formulom $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$. Je li to vektorski prostor?

RJEŠENJE Ne. Prvi od aksioma koji ovdje nije zadovoljen je distributivnost u odnosu na skalarni faktor. Moralo bi biti $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$, $\forall \alpha, \beta, v$, odnosno

$$((\alpha+\beta)x, y) = (\alpha x, y) + (\beta x, y) = (\alpha x + \beta x, 2y), \quad \forall \alpha, \beta, x, y.$$

Čim je $y \neq 0$ gornja jednakost ne vrijedi.

ZADATAK 2.5. Neka je $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ skup svih realnih funkcija realne varijable. V je realan vektorski prostor ako definiramo operacije "po točkama":

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \tag{2.1}$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha \cdot f(t). \tag{2.2}$$

Provjerite!

ZADATAK 2.6. Dokažite da svaki vektorski prostor $V \neq \{0\}$ sadrži beskonačno mnogo vektora (ovo nije točno nad konačnim poljima).

RJEŠENJE Uzmimo $x \neq 0$. Sada $\alpha \neq \beta$ povlači da je $\alpha x \neq \beta x$. Zaista,

$$\alpha x = \beta x \;\Rightarrow\; \alpha x - \beta x = 0 \;\Rightarrow\; (\alpha - \beta)x = 0 \;\Rightarrow\; \alpha - \beta = 0$$

što je kontradikcija. □

DZ 2.1. Neka je V skup svih (beskonačnih) nizova realnih brojeva. Definirajmo

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) + (b_1, b_2, b_3, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots), \tag{2.3}$$
$$\alpha(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \ldots), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

(a) Provjerite je li V realan vektorski prostor.

(b) Neka je $A \subset V$ skup svih aritmetičkih nizova. Je li A realan vektorski prostor uz iste operacije?

(c) Neka je $G \subset V$ skup svih geometrijskih nizova. Je li G realan vektorski prostor uz iste operacije?

RJEŠENJE

(a)

(b) DA

(c) NE, npr. $(1, 2, 4, 8, \ldots) + (1, 1, 1, 1, \ldots) = (2, 3, 5, 9, \ldots) \notin G$.

□

DZ 2.2. Provjerite da je $M_{mn}(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ realan vektorski prostor.

2.1 Linearna nezavisnost

DEFINICIJA 2.4. Skup $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ u vektorskom prostoru V je **linearno nezavisan** ako vrijedi

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

U protivnom se kaže da je skup **linearno zavisan**.

Činjenice 2.5. (a) Skup S je zavisan ako postoje $\alpha_i \in \mathbb{F}$, ne svi jednaki 0, takvi da je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$.

(b) Svaki skup koji sadrži 0 je zavisan.

(c) $\{x\}$ je nezavisan ako i samo ako je $x \neq 0$.

(d) Podskup nezavisnog skupa je nezavisan. Nadskup zavisnog je zavisan. (Ovo služi kao temelj definicije nezavisnosti za beskonačne skupove: kaže se da je beskonačan skup nezavisan ako je svaki njegov konačan podskup nezavisan.)

(e) Nezavisnost/zavisnost ne ovisi o poretku vektora.

(f) Niti jedan vektor osim 0 sam po sebi ne uzrokuje nezavisnost ili zavisnost skupa čiji je član. Primjer: $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\{\vec{i}, 2\vec{i}\}$.

(g) Dva nekolinearna vektora $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ bilo u $V^2(O)$, bilo u $V^3(O)$, čine nezavisan skup. Isto za tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$.

(h) Skup $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je zavisan ako i samo ako postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija preostalih. Ako je S zavisan i $x_1 \neq 0$ (i pritom S smatramo uređenim), onda postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija svojih prethodnika u S.

Zadatak 2.7. Provjerite da je skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nezavisan i u $\mathbb{R}^n$, i u $\mathbb{C}^n$.

Rješenje

(a) po definiciji.

(b) uočimo da zaključak dobivamo "napamet" iz (h).

Zadatak 2.8. Ispitajte nezavisnost skupa $\{a_1, a_2, a_3\}$ u $\mathbb{R}^3$ ako je $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $a_3 = (1, -2, 1)$.

Rješenje

Zadatak 2.9. Provjerite da je skup $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ nezavisan u $\mathcal{P}_n$.

Rješenje Direktno iz (h).

Zadatak 2.10. Neka su $a, b \neq 0$ proizvoljni vektori iz vektorskog prostora V. Tada je $\{a, b\}$ zavisan ako i samo ako je $b = \alpha a$, za neki $\alpha \in \mathbb{F}$.

Rješenje To je upravo (h).

Zadatak 2.11. Jesu li vektori $(1, 0, 0)$, $(i, 0, 0)$ nezavisni u $\mathbb{C}^3$? A u $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$?

Zadatak 2.12. Odredite nužan i dovoljan uvjet na kompleksne brojeve x i y tako da je skup $\{(1, x), (2, y)\}$ zavisan u $\mathbb{C}^2$.

Rješenje $y = 2x$

Zadatak 2.13. Odredite nužan i dovoljan uvjet na kompleksne brojeve x, y, z tako da je skup $\{(1, x, x^2), (1, y, y^2), (1, z, z^2)\}$ zavisan u $\mathbb{C}^3$.

DZ 2.3. Provjerite jesu li sljedeći skupovi linearno nezavisni:

(a) $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ u M_{mn}.

(b) $\{(1, 9, 7), (2, 1, 1), (-1, 8, 6)\}$ u $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1)\}$ u $\mathbb{C}^4$.

(d) $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ u $\mathbb{R}^4$.

(e) $\{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ u $\mathcal{P}_3$.

(f) $\{f_1, f_2, f_3\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$, $f_2(x) = x^2 + 2x - 7$, $f_3(x) = 3x - 9$.

(g) $\{e^x, e^{x+1}\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(h) $\{\sin^2 x, \frac{1}{2}, \cos^2 x\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(i) $\{e^x, x^3, \sin x\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

DZ 2.4. Odredite nužan i dovoljan uvjet na vektor $v \in \mathbb{R}^4$ tako da skup $\{e_1, e_2, e_3, v\}$ bude linearno nezavisan.

Rješenje $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_4 \neq 0$. □

DZ 2.5. Neka je $\{x, y\}$ linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru V. Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$. Odredite nužan i dovoljan uvjet da skup $\{\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y\}$ bude nezavisan.

Rješenje Analizirajmo zavisnost. Prva mogućnost je $\alpha x + \beta y = 0$ odakle slijedi da je $\alpha = \beta = 0$. Druga mogućnost je $\gamma x + \delta y = \lambda(\alpha x + \beta y)$. Slijedi da je $\gamma = \lambda\alpha$, $\delta = \lambda\beta$. Obje mogućnosti mogu se iskazati uvjetom $\alpha\delta - \gamma\beta = 0$. To je dakle nužan uvjet zavisnosti. Vidi se da je i dovoljan. □

DZ 2.6. Neka je skup $\{x, y, z\}$ linearno nezavisan u V. Kakav je $\{x+y, y+z, z+x\}$?

Rješenje

$$\alpha(x+y) + \beta(y+z) + \gamma(z+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha+\gamma)x + (\alpha+\beta)y + (\beta+\gamma)z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ pa je dani skup linearno nezavisan. □

2.2 Sustav izvodnica

Definicija 2.6. Skup $S \subset V$ je **sustav izvodnica** za V ako vrijedi $[S] = V$. Kako je

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\},$$

ovo znači da se svaki vektor iz V može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz S.

Činjenice 2.7. (a) Nadskup sustava izvodnica je opet sustav izvodnica (**skup generatora**).

(b) Trivijalno je $[V] = V$; umijeće je naći čim manji skup izvodnica.

(c) Primjer: dva nekolinearna vektora u $V^2(O)$, tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$.

(d) Primjer: $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za $\mathbb{R}^n$ (isto za $\mathbb{C}^n$).

(e) Ako je S sustav izvodnica za V i ako se neki vektor iz S može prikazati kao linearna kombinacija ostalih članova iz S, onda je i $S \setminus \{x\}$ sustav izvodnica za V.

(f) Biti sustav izvodnica za V nije ni u kakvoj uzročno posljedičnoj vezi s linearnom nezavisnošću/zavisnošću.

Primjer: tri vektora u $V^2(O)$, dva nekolinearna vektora u $V^3(O)$.

(g) Po definiciji kažemo da je V **konačnodimenzionalan** ako postoji bar jedan konačan sustav izvodnica za V. Naši standardni primjer su takvi, uočimo da $\mathcal{P}$ nije (nije niti $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, niti $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$). Još uočimo da je i $\{0\}$ konačnodimenzionalan na trivijalan način.

2.3 Baza

Definicija 2.8. (Konačan) linearno nezavisan sustav izvodnica naziva se **baza**.

Činjenice 2.9.

(h) Svaki konačnodimenzionalan prostor osim $\{0\}$ ima (konačnu) bazu.

(i) Baza nije jedinstvena; primjer: *svaka* dva nekolinearna vektora u $V^2(O)$ čine bazu.

(j) Sve baze za V su jednakobrojne. Taj broj nazivamo **dimenzija prostora** V, oznaka: $\dim V$.

(k) Ako je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V, onda svaki vektor $v \in V$ ima (zašto?) jedinstven (zašto?) prikaz u obliku $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.

(l) Svaki konačan sustav izvodnica za V može se reducirati do baze.

(m) Svaki linearno nezavisan skup u V može se nadopuniti do baze (Primjer: dva nekolinearna vektora u $V^3(O)$).

(n) Neka je $n = \dim V$.

Linearno nezavisni skupovi u V imaju $\leq n$ elemenata. Linearno nezavisan skup od n elemenata je nužno baza.

Sustavi izvodnica za V imaju $\geq n$ elemenata. Sustav izvodnica od n elemenata je nužno baza.

Zadatak 2.14. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je baza za $\mathbb{R}^n$, također i za $\mathbb{C}^n$.

Zadatak 2.15. $\{1, t, \ldots, t^n\}$ je baza za $\mathcal{P}_n$.

Zadatak 2.16. $\{(1,1), (2,1)\}$ je baza za $\mathbb{R}^2$. Provjerite.

Zadatak 2.17. $\{(1,1,8), (1,1,2), (1,0,1)\}$ je baza za $\mathbb{R}^3$. Provjerite.

Zadatak 2.18. $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,-1,0)\}$ je baza za $\mathbb{R}^3$. Prikažite u njoj proizvoljni $v \in \mathbb{R}^3$.

Rješenje

$$v = (x_1, x_2, x_3) = x_3(1,1,1) + \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)(1,1,0) + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)(1,-1,0).$$

Zadatak 2.19. Zašto je kanonska baza kanonska?

Zadatak 2.20. $\{(1,0),(0,1)\}$ nije baza za $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. $\{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\}$ je baza za $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. Dakle, $\dim \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} = 4$.

DZ 2.7. Provjerite da je $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ baza za M_{mn}. Zašto je kanonska?

DZ 2.8. Je li skup $\{(1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ nezavisan/sustav izvodnica/baza za $\mathbb{R}^3$? Isto pitanje za skup $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, -1, 1)\}$.

DZ 2.9. Provjerite da je $\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ baza za $\mathbb{R}^4$ i prikažite u njoj proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^4$.

DZ 2.10. Nađite jednu bazu i dimenziju za $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

DZ 2.11. Nađite bazu i dimenziju za A, prostor aritmetičkih nizova.

Rješenje

$$(a, a + d, a + 2d, \ldots) = a(1, 1, 1, \ldots) + d(0, 1, 2, \ldots).$$

□

DZ 2.12. Neka je $\{a, b\}$ baza za V (dakle, $\dim V = 2$). Uz koji uvjet na $c \in V$ će i skup $\{a, c\}$ biti baza za V?

Rješenje $\{a, c\}$ je baza ako i samo ako taj skup nije linearno zavisan, a to vrijedi ako i samo ako je $c \neq \lambda a$. Iz $c = \alpha a + \beta b$ slijedi da je $\{a, c\}$ baza ako i samo ako je $\beta \neq 0$.
Ili
$c = \alpha a + \beta b$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Ako je $\beta = 0$, onda je $\{a, \beta a\}$ zavisan skup. Dakle, $\beta \neq 0$ je nužan uvjet. Je li i dovoljan?

$$A(\alpha a + \beta b) + Ba = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha A + B)a + \beta Ab = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha A + B = 0, \beta A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B = 0.$$

Dakle, to je i dovoljan uvjet. □

DZ 2.13. Isto pitanje kao prethodno za bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ i skup $\{b_1, \ldots, b_{n-1}, c\}$.

Rješenje Nužan i dovoljan uvjet je da je $\gamma_n \neq 0$, gdje je $c = \sum_{i=1}^n \gamma_i b_i$. □

DZ 2.14. Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za V i definirajmo $b_{n+1} = -b_1 - b_2 - \ldots - b_n$. Dokažite da se svaki vektor $v \in V$ može, i to na jedinstven način, prikazati u obliku $v = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i b_i$, pri čemu je $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$.

Rješenje Neka je $v \in V$ proizvoljan, $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Uočimo da je $\forall \beta \in \mathbb{F}$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i + \beta b_{n+1} - \beta b_{n+1} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta) b_i + \beta b_{n+1}$$

pa se v može prikazati pomoću vektora $b_1, \ldots, b_{n+1}$, ali bez dodatnog uvjeta, na beskonačno mnogo načina.
Sada želimo riješiti jednadžbu $\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta) + \beta = 0$ po β. Očito je (jedino) rješenje $\beta = -\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
Dokažimo još jedinstvenost zapisa. Pretpostavimo da se neki $v \in V$ može zapisati kao

$$v = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i b_i,$$

pri čemu je $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 0$. Tada je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i + \alpha_{n+1} b_{n+1} = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i + \beta_{n+1} b_{n+1}$$

pa je

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{n+1})\, b_i = \sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \beta_{n+1})\, b_i.$$

Kako je zapis vektora u bazi jedinstven, slijedi da je

$$\alpha_i - \alpha_{n+1} = \beta_i - \beta_{n+1}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Zbrojimo li sve gornje jednakosti, dobivamo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - n\alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - n\beta_{n+1}$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i - (n+1)\alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i - (n+1)\beta_{n+1}$$

odakle slijedi da je $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$. Uvrštavanjem u (2.5) dobivamo da je $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n+1$.

Zadatak 2.21. Skup $\{(1,1,0)\}$ nadopuniti do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

Rješenje Gledamo $\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (dodali smo kanonsku bazu početnom skupu). Jedna nadopuna je $\{a, e_1, e_3\}$. Uočimo nejedinstvenost: drugo moguće rješenje je $\{a, e_2, e_3\}$.

Zadatak 2.22. Neka je $n \in \mathbb{N}$. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ svih polinoma stupnja najviše $2n$ definiramo polinome

$$p_k(x) = (x^2 + x + 5)^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dokažite da je skup $\{p_1, \ldots, p_n\}$ linearno nezavisan, te ga nadopunite do baze za $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$.

DZ 2.15. Nadopunite $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ do baze od M_2.

DZ 2.16. Nadopunite $\{(1,1,1,1),(1,-1,-1,-1)\}$ do baze za $\mathbb{R}^4$.

2.4 Potprostor

Definicija 2.10. $M \subseteq V$ je **potprostor** od V, oznaka $M \leq V$, ako je M i sam vektorski prostor s naslijeđenim operacijama.

Činjenice 2.11. (a) Trivijalni potprostori su $\{0\}$ i V. Uvijek je za $M \leq V$, $\dim M \leq \dim V$.

(b) $M \leq V$, $\dim M = \dim V \Leftrightarrow M = V$.

(c) Za $M \subseteq V$ vrijedi $M \leq V$ ako i samo ako je $\alpha x + \beta y \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall x, y \in M$, ako i samo ako $x + y \in M$, $\forall x, y \in M$ i $\alpha x \in M$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$.

Uvijek je $0 \in M$.

(d) $M_1, M_2 \leq V \Rightarrow M_1 \cap M_2 \leq V$.

Zadatak 2.23. Pokažite da je $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^3$, nađite mu bazu i dimenziju.

Rješenje Uzmimo proizvoljne $x = (x_1, x_2, x_3) \in M$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in M$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada za $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$ vrijedi

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 - x_2 + x_3) + \beta(y_1 - y_2 + y_3) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

pa je $\alpha x + \beta y \in M$.

Dokazali smo da je M potprostor prostora $\mathbb{R}^3$. Odredimo sada bazu za M. Za proizvoljan $x \in M$ imamo

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0) + (0, x_3, x_3) = x_1(1, 1, 0) + x_3(0, 1, 1).$$

Vektori $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ očito pripadaju M, razapinju ga i nezavisni su. Dakle, $\dim M = 2$. □

ZADATAK 2.24. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$.
RJEŠENJE Uzmimo proizvoljne $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in M$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada za $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4)$ vrijedi

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$
$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) - 2\,(\alpha x_4 + \beta y_4) = \alpha(x_1 + x_2 - 2x_4) + \beta(y_1 + y_2 - 2y_4) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

pa je $\alpha x + \beta y \in M$.
Dokazali smo da je M potprostor prostora $\mathbb{R}^3$. Odredimo sada bazu za M. Za proizvoljan $x \in M$ imamo

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1, x_1, x_3, \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) = (x_1, x_1, x_3, x_1) = x_1(1, 1, 0, 1) + x_3(0, 0, 1, 0).$$

Skup $\{(1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ je sustav izvodnica i nezavisan je pa čini bazu za M. Slijedi da je $\dim M = 2$. □

ZADATAK 2.25. Neka je U skup svih gornjetrokutastih matrica u $M_n(\mathbb{R})$ (ili $M_n(\mathbb{C})$).

$$A = (a_{ij}) \in U \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = 0, \quad \forall i > j.$$

Pokažite da je $U \leq M_n$ i nađite mu jednu bazu i dimenziju.
RJEŠENJE $\dim U = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. □

ZADATAK 2.26. Za matricu $A \in M_n$, $A = (a_{ij})$ definiramo **transponiranu matricu** $A^t = (b_{ij})$ formulom $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.
U M_2 definiramo skup **simetričnih matrica** $S = \{A \in M_2 : A^t = A\}$ i skup **antisimetričnih matrica** $L = \{A \in M_2 : A^t = -A\}$. Provjerite da su to potprostori od M_2 i nađite im po jednu bazu i dimenziju.
RJEŠENJE Najprije općenito pokazati da vrijedi $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $A, B \in M_n$. Sada je jasno da je $S, L \leq M_2$.

$$A \in S \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dim S = 3.$$

$$A \in L \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dim L = 1.$$

□

ZADATAK 2.27. Je li $M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 - 2\overline{z_2} = 0\}$ potprostor od $\mathbb{C}^2$?

RJEŠENJE Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M$. Sada je $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \in M$ ako i samo ako je

$$\alpha x_1 + \beta y_1 - 2\overline{\alpha x_2 + \beta y_2} = \alpha x_1 - 2\overline{\alpha x_2} + \beta y_1 - 2\overline{\beta}\overline{y_2} = 0,$$

a to općenito ne vrijedi. Konkretno, nije problem u zbrajanju, već u množenju skalarom. Na primjer, $x = (2 + 2i, 1 - i) \in M$, ali $i \cdot x = (-2 + 2i, 1 + i) \notin M$.
Sada primjetimo da gornji račun pokazuje da je sve u redu ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dakle, $M \leq \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. Još vrijedi

$$v = (z_1, z_2) \in M \quad \Leftrightarrow \quad v = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2),\ 2(x_2 - iy_2) = x_1 + iy_1,$$

tj. $2x_2 = x_1$, $-2y_2 = y_1$, a to vrijedi ako i samo ako je

$$v = \left(x_1 + iy_1, \frac{1}{2}x_1 - i\frac{1}{2}y_1\right) = x_1\left(1, \frac{1}{2}\right) + y_1\left(i, -\frac{i}{2}\right).$$

ZADATAK 2.28. U $\mathbb{R}^4$ su dani vektori $a_1 = (1, 1, 2, 2)$, $b_1 = (1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $b_2 = (0, 1, 2, 1)$. Neka je $M_1 = [\{a_1, b_1\}]$, $M_2 = [\{a_2, b_2\}]$. Dokažite da je $M_1 = M_2$.

RJEŠENJE Jasno je da zapravo imamo baze za M_1, M_2. Zato je $\dim M_1 = \dim M_2 = 2$ pa je dovoljno vidjeti da je $M_1 \subseteq M_2$ (ili $M_2 \subseteq M_1$). Dovoljno je, dalje, vidjeti $a_2, b_2 \in M_1$ jer M_1 kao vektorski prostor tada mora sadržavati i sve njihove linearne kombinacije. Sada se računa $a_2 = a_1 + b_1$, $b_2 = a_1 - b_1$.

ZADATAK 2.29. Presjek bilo koje množine potprostora od V je opet potprostor od V.

ZADATAK 2.30. Za $S \subseteq V$ vrijedi $[S] = \bigcap_{S \subseteq M \leq V} M$.

ZADATAK 2.31. Neka su $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \neq 0\}$ i $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ podskupovi vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Odredite linearne ljuske skupova A i B.

DZ 2.17. Koji od navedenih skupova su potprostori od $\mathbb{R}^n$? Za one koji jesu nađite po jednu bazu i dimenziju.

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}, \forall i\}$$
$$B = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = 2x_2\}$$
$$C = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$$
$$D = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0\right\}$$
$$E = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$$
$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_{2i} = 0, \forall i\}$$
$$G = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_2 = x_4 = \ldots = x_{2i} = \ldots\}$$

DZ 2.18. Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$. Koje uvjete moraju zadovoljavati ovi brojevi da bi skup $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \beta\}$ bio potprostor?

DZ 2.19. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - 2x_2 - x_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4$. Baza i dimenzija?

DZ 2.20. Neka je L skup svih donjetrokutastih matrica u M_n. Dokažite da je to potprostor od M_n, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

DZ 2.21. Neka je D skup dijagonalnih matrica u M_n. Isto kao gore.

DZ 2.22. Dokažite da su $X = \{A \in M_n : A^t = A\}$ i $Y = \{A \in M_n : A^t = -A\}$ potprostori od M_n, nađite im po jednu bazu i dimenziju.

DZ 2.23. $M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(5) = 0\} \leq \mathcal{P}_3$. Baza i dimenzija?

DZ 2.24. Neka u V vrijedi $x + y + z = 0$. Dokažite da je $[\{x, y\}] = [\{y, z\}]$.

DZ 2.25. $M = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \dots = x_{n-1} - x_n = x_n - x_1\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokažite da je $M \leq \mathbb{R}^n$, nađite mu neku bazu i nadopunite je do baze za $\mathbb{R}^n$.

DZ 2.26. Neka je $M \leq V$, $M \neq \{0\}, V$. Pokažite da postoji baza za V čiji niti jedan član ne leži u M. Uputa: pokušajte zamisliti/konstruirati bazu za $V^3(O)$ čiji niti jedan član ne leži u xy–ravnini.

Rješenje Neka je $\{a_1, \dots, a_k\}$ jedna baza za M, pri čemu je $1 \leq k < n = \dim V$. Nadopunimo je do baze $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ za V i gledamo skup $\{a_1 + a_n, \dots a_k + a_n, a_{k+1}, \dots, a_n\}$. Lako se vidi da je nezavisan i kako sadrži točno n elemenata, on je baza za V.
Uočimo da nijedan od vektora $a_{k+1}, \dots, a_n$ ne leži u M (jer bi tada skup $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ bio zavisan). Također, nijedan od vektora $a_1 + a_n, \dots, a_k + a_n$ ne leži u M.
Pouka zadatka je da ne možemo *a priori* računati na to da će baza za V u sebi sadržavati bazu za M. No, to možemo postići ako krenemo od baze za M pa je nadopunimo do baze za V. $\square$

2.5 Suma i presjek potprostora

Definicija 2.12. Za $L, M \leq V$ definira se **suma potprostora** L i M kao $L + M = [L \cup M]$. Kažemo da je suma **direktna** ako je $L \cap M = \{0\}$ i tada pišemo $L \dot{+} M$.

Činjenice 2.13.

(a) $L + M = \{a + b : a \in L, b \in M\}$. Rastav $x = a + b$ svih vektora $x \in L + M$ je jedinstven ako i samo ako je suma direktna.

(b) $\dim L + M = \dim L + \dim M - \dim L \cap M$.

(c) Ako je $L \dot{+} M = V$, kaže se da je M direktan komplement za L (i obratno).

Zadatak 2.32. Gornjetrokutaste U i donjetrokutaste L matrice u M_2. Pokazati da je $U + L = M_2$, demonstrirati nejedinstvenost dekompozicije.

DZ 2.27. Isto u M_n.

Zadatak 2.33. Simetrične X i antisimetrične Y matrice u M_2. Pokazati da je $X \dot{+} Y = M_2$. Posljedica: svaka kvadratna matrica se na jedinstven način može prikazati kao zbroj jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice.

DZ 2.28. Isto u M_n.

Zadatak 2.34. Za $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ provjeriti da je potprostor i naći mu neki direktan komplement.

Rješenje Vrijedi da je $x \in M$ ako i samo ako je

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) = x_3(1, 1, 1, 0) + x_4(1, -2, 0, 1).$$

Dakle je $\{(1,1,1,0),(1,-2,0,1)\}$ jedna baza za M, sad je treba dopuniti do baze za $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{\underbrace{(1,1,1,0)}_{=:a},\underbrace{(1,-2,0,1)}_{=:b},e_1,e_2,\cancel{e_3},\cancel{e_4}\right\}.$$

Očito su $\{a,b,e_1\}$ i $\{a,b,e_1,e_2\}$ nezavisni i zato možemo uzeti $L=[\{e_1,e_2\}]$ kao direktni komplement.

Zadatak 2.35. Neka je $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1=x_2,\ x_3^2+x_4^2=1\}$. Nađite (neki) direktni komplement potprostora $[S]$ u prostoru $\mathbb{R}^4$.

Općenito komplement dobijemo kao linearnu ljusku onih vektora koji bazu od M nadopunjuju do baze cijelog prostora. Jasno je da je rješenje nejedinstveno – vidi se iz postupka. Na primjeru $V^2(O)$ vidimo nejedinstvenost i zorno.

Napomena 2.14. Ako imamo $L\dotplus M=V$ i ako imamo baze $\{a_1,\dots,a_m\}$ i $\{b_1,\dots,b_l\}$ za M i L, onda je $\{a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_l\}$ baza za V. Demonstrirati!
Uočimo da stvar bitno ovisi o direktnosti sume.

Uzmimo sad bazu $\{a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_l\}$ kao gore, neka je $1\le m<\dim V$. Definiramo $c_1=b_1+a_1$, $\dots$, $c_l=b_l+a_1$ i odmah vidimo da je skup $\{a_1,\dots,a_m,c_1,\dots,c_l\}$ nezavisan, dakle i baza za V. Prostor $K=[\{c_1,\dots,c_l\}]$ je također jedan direktan komplement za M. Jasno je da je $K\ne L$ jer ako bi npr. imali $c_1\in L$, vrijedilo bi $c_1=b_1+a_1=\sum_{j=1}^{l}\lambda_j b_j$ i slijedilo bi da je $a_1\in L$ pa je $a_1\in M\cap L=\{0\}$ što je nemoguće.
Zbog nejedinstvenosti direktnog komplementa nije korektna oznaka $V\dot{-}M$.

Kako nalazimo bazu presjeka (i sume) potprostora?
Neka su dani potprostori M i L od V, neka su dane baze $\{a_1,\dots,a_m\}$ i $\{b_1,\dots,b_l\}$ za M i L, dakle $\dim M=m$, $\dim L=l$. Skup $\{a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_l\}$ je očito sistem izvodnica za $M+L$.

- Ako je linearno nezavisan, onda je i baza za $M+L$ pa je $\dim M+L=m+l=\dim M+\dim L$ pa slijedi da je $\dim M\cap L=0$, tj. $M\cap L=\{0\}$.

- Ako je zavisan (uočimo $a_1\ne0$), nađimo vektor koji je linearna kombinacija prethodnika; to nije nijedan od a–ova, dakle to je neki b_i. Izbacimo ga van i ono što je ostalo još uvijek je sistem izvodnica za $L+M$. Postupak nastavimo.

  Recimo da smo proveli takvih k koraka dok na kraju nismo dobili nezavisan skup, time i bazu za $L+M$. Očito je $k\le l$. Ako je $k=l$, svi b–ovi su izbačeni i slijedi da je $M+L=M$, tj. $L\le M$.

  Ostaje razmotriti slučaj $k<l$. Nije smanjenje općenitosti ako pretpostavimo da su izbačeni $b_1,\dots,b_k$. Dakle, $\{a_1,\dots,a_m,b_{k+1},\dots,b_l\}$ je baza za $M+L$. Sad svaki od $b_1,\dots,b_k$ kao element od $L\subseteq M+L$ dopušta rastav u toj bazi u obliku

$$b_r=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,r}a_i+\sum_{j=k+1}^{l}\beta_{j,r}b_j=:e_r+f_r,\qquad r=1,\dots,k.$$

  Pogledajmo vektore $e_1,\dots,e_k$. Očito su u $M\cap L$, tvrdimo da zapravo čine bazu za $M\cap L$. To vrijedi jer je $\dim M\cap L=\dim M+\dim L-\dim M+L=m+l-(m+l-k)=k$ pa vidimo da samo treba dokazati njihovu nezavisnost.

$$\sum_{r=1}^{k}\gamma_r e_r=0\quad\Rightarrow\quad\sum_{r=1}^{k}\gamma_r(b_r-f_r)=0\quad\Rightarrow\quad\gamma_1b_1+\gamma_2b_2+\ldots+\gamma_kb_k+\bullet\cdot b_{k+1}+\bullet\cdot b_{k+2}+\ldots+\bullet\cdot b_l=0.$$

Slijedi da su svi koeficijenti 0, posebno $\gamma_1 = \ldots = \gamma_k = 0$.

ZADATAK 2.36 (ilustracija algoritma). Neka su M i L zadani svojim bazama $a_1 = (1,0,1)$, $a_2 = (1,2,1)$ i $b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (0,0,1)$. Odrediti baze za $M+L$ i $M \cap L$.

RJEŠENJE Skup $\{(1,0,1),(1,2,1),(1,0,0),(0,0,1)\}$ je zavisan jer sadrži 4 vektora. Jasno je da je b_1 nezavisan s a_1, a_2 pa je $\{a_1, a_2, b_1\}$ baza za $M+L$. Sad preostaje b_2 prikazati u toj bazi i uzeti mu M–komponentu.

$$(0,0,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,2,1) + \beta(1,0,0)$$

Dobije se $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = -1$ pa je $1 \cdot (1,0,1) + 0 \cdot (1,2,1) = (1,0,1)$ baza za $M \cap L$. □

DZ 2.29. Za $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0, x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ naći bazu i neki direktan komplement.

DZ 2.30. Zadani su $M, L \leq \mathbb{R}^4$ svojim bazama $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,1,-1,-1)$, $a_3 = (1,-1,1,-1)$, te $b_1 = (1,-1,-1,1)$, $b_2 = (2,-2,0,0)$, $b_3 = (3,-1,1,1)$. Nađite baze za $M+L$ i $M \cap L$.

DZ 2.31. Neka je $M = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$, $L = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j, \forall i,j\}$. Dokažite da je L direktan komplement za M i nađite još jedan, različit od L direktan komplement za M.

RJEŠENJE Vrijedi da je $x \in M$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} x &= (x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = (x_1,\ldots,x_{n-1},-x_1-\ldots-x_{n-1}) \\ &= x_1(1,0,\ldots,0,-1) + x_2(0,1,0,\ldots,0,-1) + \ldots + x_{n-1}(0,0,\ldots,1,-1). \end{aligned}$$

Baza za M je $\{(1,0,\ldots,0,-1),(0,1,0,\ldots,0,-1),\ldots,(0,0,\ldots,1,-1)\}$, $\dim M = n-1$.
Vrijedi da je $x \in L$ ako i samo ako je

$$x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1,x_1,\ldots,x_1) = x_1(1,1,\ldots,1)$$

pa je $\{(1,1,\ldots,1)\}$ baza za L, a $\dim L = 1$.
Vrijedi da je L direktan komplement od M ako i samo ako je $L \dotplus M = \mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $L+M = \mathbb{R}^n$, $L \cap M = \{0\}$.
Gledamo $L \cap M$. Vrijedi da je $x \in L \cap M$ ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ i $\sum x_i = 0$. Dakle, $nx_1 = 0$ pa je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Dobili smo da je $L \cap M = \{0\}$, a kako je $\dim(L+M) = \dim L + \dim M = n-1+1 = n$, onda je $L+M = \mathbb{R}^n$.
Primijetimo da nije bilo potrebno dokazivati obje stvari ($L+M = \mathbb{R}^n$, $L \cap M = \{0\}$). Zahvaljujući tome što znamo dimenzije, jedno povlači drugo. Puno je lakše dokazati da je $L \cap M = \{0\}$. □

DZ 2.32. Neka su $M, L, K \leq V$. Pokažite da je $(M \cap L) + (M \cap K) \subseteq M \cap (L+K)$. Vrijedi li jednakost?

RJEŠENJE Ako je $x \in (M \cap L) + (M \cap K)$, onda ima oblik $x = a+b$, gdje su $a \in M \cap L$, $b \in M \cap K$. Očito je $a+b \in M$ (jer su oba iz M, a M je potprostor), također je $a+b \in L+K$ (jer je $a \in L$, $b \in K$). Dakle je $a+b \in M \cap (L+K)$.
Jednakost općenito ne vrijedi. Uzmimo u $\mathbb{R}^2$ $M = [(1,1)]$, $L = [(1,0)]$, $K = [(0,1)]$. Sad je $M \cap L = M \cap K = \{0\}$, dok je $M \cap (L+K) = M \cap \mathbb{R}^2 = M$. □

DZ 2.33. Neka je $\dim V = n$, neka su $M, L \leq V$, $1 \leq \dim M = \dim L < n$. Dokažite da M i L imaju zajednički direktan komplement.

RJEŠENJE Postupimo kao kod dokaza teorema o dimenziji sume.
Neka je $\{a_1,\ldots,a_k\}$ baza za $M \cap L$. Nadopunimo je do baze za M i L: $B_M = \{a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_r\}$, $B_L = \{a_1,\ldots,a_k,c_1,\ldots,c_r\}$. Vrijedi da je $k+r = \dim M = \dim L$.

Sad iz dokaza spomenutog teorema znamo da je $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_r\}$ baza za $M + L$. I ovu bazu nadopunimo do baze cijelog prostora V: $B = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_r, v_1, \ldots, v_s\}$. Uočimo da je $\dim M = \dim L = k + r$, $\dim V = k + r + r + s$ pa traženi komplement ima dimenziju $r + s$.
Tvrdimo da $N = [\{b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_r + c_r, v_1, \ldots, v_s\}]$ ima svojstvo da je $M \dot{+} N = V$, $L \dot{+} N = V$. Jasno je da je $M \cap N = \{0\} = L \cap N$. Naime, ako je $x \in M \cap N$, onda je

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i (b_i + c_i) + \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i.$$

Zbog nezavisnosti elemenata baze B slijedi $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\delta_i = 0$, $\forall i$. Dakle, $x = 0$. Analogno se dobije $L \cap N = \{0\}$.
Slično se zaključi da je $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, b_1 + c_1, \ldots, b_r + c_r, v_1, \ldots, v_s\}$ baza za V (nezavisnost dobijemo kao gore, a kardinalitet je pravi). Dakle, dobili smo direktan komplement za M. Argument za L je isti.

Poglavlje 3

Matrice

Definicija 3.1. Preslikavanje $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$ zove se **matrica** tipa (m, n) (ili $m \times n$), odnosno realna (kompleksna) matrica s m redaka i n stupaca. Oznaka za skup svih takvih matrica je $M_{mn}(\mathbb{F})$.

Uvodimo sljedeće pojmove i oznake:

1. Tablični zapis $A = (a_{ij}) = [a_{ij}]$.

2. Za skalare $a_{ij} \in \mathbb{F}$ kažemo da su **elementi** matrice A.

3. Uređena n–torka $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ je i–ti **redak** od A.

4. Uređena m–torka $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ je j–ti **stupac** od A.

5. **Nulmatrica** $0 \in M_{mn}(\mathbb{F})$ zadana je s $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$.

6. Matricu tipa $1 \times n$ nazivamo **(jedno)retčanom**.

7. Matricu tipa $m \times 1$ nazivamo **(jedno)stupčanom**.

8. Matricu tipa $n \times n$ nazivamo **kvadratnom**.

9. Uređena n–torka $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ je **glavna dijagonala** od A.

10. Uređena n–torka $(a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1})$ je **sporedna dijagonala** od A.

11. Operacije: zbrajanje matrica iz $M_{mn}(\mathbb{F})$ i množenje matrica iz $M_{mn}(\mathbb{F})$ skalarom iz $\mathbb{F}$. Tada je $M_{mn}(\mathbb{F})$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ dimenzije $m \cdot n$.

12. Ulančane matrice možemo množiti: Ako su $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B = (b_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{F})$, tada je $C = A \cdot B = (c_{ij}) \in M_{mp}(\mathbb{F})$, gdje je
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

13. Svojstva množenja:

    (1) $A(B + C) = AB + AC$ (desna distributivnost)

    (2) $(A + B)C = AC + BC$ (lijeva distributivnost)

(3) $(\alpha A)B = \alpha(AB)$ (kvaziasocijativnost)

(4) $(AB)C = A(BC)$ (asocijativnost)

14. Množenje nije komutativno, čak ni ako su oba produkta definirana

15. **Jedinična matrica** $I \in M_n(\mathbb{F})$ dana je s $I = (\delta_{ij})$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

16. Za množenje kvadratnih matrica imamo još uvjet

(5) $AI = IA = A$, $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$

pa je $M_n(\mathbb{F})$ **asocijativna algebra s jedinicom**.

Zadatak 3.1. Pomnožite matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Rješenje Produkt AB je definiran i iznosi

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{pmatrix},$$

a produkt BA nije definiran.

Zadatak 3.2 (množenje nije komutativno čak ni kad oba produkta postoje). Izračunajte AB i BA, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Rješenje

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

17. U $M_n(\mathbb{F})$ postoje **dijelitelji nule**, npr. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. U $M_n(\mathbb{F})$ definiramo **potenciranje** kao

$$A^0 = I, A^1 = A, \ldots, A^n = A^{n-1}A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 3.3. Vrijedi da je

(a) $A^m A^n = A^{m+n}$,

(b) $(A^m)^n = A^{mn}$,

za sve $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Rješenje Dokazujemo indukcijom po n, uz m fiksan.

$\boxed{n = 1}$ $A^m \cdot A^1 \overset{\text{def}}{=} A^{m+1}$,

$\boxed{\text{korak}}$ $A^m \cdot A^{n+1} \overset{\text{def}}{=} A^m (A^n \cdot A) \overset{\text{asoc}}{=} (A^m \cdot A^n) \cdot A \overset{\text{p.i.}}{=} A^{m+n} \cdot A \overset{\text{def}}{=} A^{m+n+1}$.

DZ 3.1. Izračunajte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

RJEŠENJE Indukcijom dokazati $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

DZ 3.2. Dokažite da je:

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$.

ZADATAK 3.4. Dokažite da je $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ako i samo ako je $AB = BA$.

19. Za $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ definiramo **transponiranu matricu** $A^T = (b_{ij}) \in M_{nm}(\mathbb{F})$ s $b_{ij} = a_{ji}$. Dokažite

(a) $\left(A^T\right)^T = A$, $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$,

(b) $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$, $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$,

(c) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, za A, B ulančane,

(d) $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdot A_{k-1}^T \cdots A_1^T$, za $A_1, \ldots, A_k$ ulančane.

(a) očito

(b) imali smo već prije

(c) Neka su $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B = (b_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{F})$. Tada je $(A \cdot B)^T \in M_{pm}(\mathbb{F})$. Kako je $A^T \in M_{nm}(\mathbb{F})$, $B^T \in M_{pn}(\mathbb{F})$, onda je $B^T \cdot A^T \in M_{pm}(\mathbb{F})$ pa se dimenzije danih matrica slažu. Pogledajmo (i,j)–ti element od jedne i druge matrice:

$$\left((A \cdot B)^T\right)_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$
$$\left(B^T \cdot A^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(B^T\right)_{ik} \left(A^T\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$

(d) indukcijom iz (c)

20. Za $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ definiramo **trag** kao $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

ZADATAK 3.5. Dokažite da je $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

RJEŠENJE Neka je $AB = C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, $BA = D = (d_{ij})$, $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$. Tada je

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \mathrm{Tr}(BA).$$

□

21. Za $A = (A_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ definiramo njoj **konjugiranu** matricu $\overline{A} = (b_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ s $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$.

DZ 3.3. Dokažite da za $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vrijedi

(a) $\overline{A} = A$ ako i samo ako je A realna matrica

(b) $\overline{\overline{A}} = A$

(c) $\overline{\alpha A + \beta B} = \overline{\alpha}\overline{A} + \overline{\beta}\overline{B}$

(d) $\overline{A^T} = \overline{A}^T$

(e) $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, za ulančana matrice A, B.

22. Za $A = (A_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ definiramo njoj **adjungiranu** (ili **hermitski konjugiranu**) matricu $A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}$.

DZ 3.4. Pokažite da vrijedi

(a) $A^* = A^T$ ako i samo ako je A realna

(b) $(A^*)^* = A$

(c) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$

(d) $(AB)^* = B^* A^*$, za A, B ulančane

(e) $(A_1 A_2 \cdots A_k)^* = A_k^* A_{k-1}^* \cdots A_1^*$, za $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ulančane.

Definicija 3.2. Kažemo da je $A \in M_n(\mathbb{F})$

simetrična ako je $A^T = A$,

antisimetrična ako je $A^T = -A$.

Za $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je

hermitska ako je $A^* = A$,

antihermitska ako je $A^* = -A$.

Zadatak 3.6. (a) Simetrične matrice reda n čine potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije $\frac{n(n+1)}{2}$.

(b) Antisimetrične matrice reda n čine potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije $\frac{n(n-1)}{2}$.

(c) $M_n(\mathbb{F})$ je direktna suma simetričnih i antisimetričnih matrica.

(d) Svaka se kvadratna matrica može na jedinstven način prikazati kao suma simetrične i antisimetrične matrice. Konretno, vrijedi

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

(e) Produkt dvije simetrične (antisimetrične) matrice ne mora biti simetrična (antisimetrična) matrica.

Produkt dvije simetrične matrice A, B je simetrična matrica ako i samo ako je $AB = BA$.

Produkt dvije antisimetrične matrice A, B je antisimetrična matrica ako i samo ako je $AB = -BA$.

(f) Za bilo koji $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ matrice $AA^T \in M_m(\mathbb{F})$ i $A^T A \in M_n(\mathbb{F})$ su simetrične.

(g) Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ simetrična (antisimetrična) matrica, tada je to i produkt $T^T A T$, za svaki $T \in M_n(\mathbb{F})$.

Rješenje

(a) znamo

(b) znamo

(c) znamo

(d) znamo

(e) npr. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$.

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$$

npr. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

$$-AB = (AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A) = BA.$$

(f) DZ

(g) DZ

□

ZADATAK 3.7. (a) Hermitske matrice reda n ne čine *kompleksan* potprostor od $M_n(\mathbb{C})$, ali čine realan.

(b) Antihermitske matrice reda n ne čine *kompleksan* potprostor od $M_n(\mathbb{C})$, ali čine realan.

(c) $M_n(\mathbb{C})_\mathbb{R}$ je direktna suma hermitskih i antihermitskih matrica.

(d) Svaka se kvadratna matrica može na jedinstven način prikazati kao suma hermitske i antihermitske matrice. Konretno, vrijedi

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}.$$

(e) Produkt dvije hermitske (antihermitske) matrice ne mora biti hermitska (antihermitska) matrica.

Produkt dvije hermitske matrice A, B je hermitska matrica ako i samo ako je $AB = BA$.

Produkt dvije antihermitske matrice A, B je antihermitska matrica ako i samo ako je $AB = -BA$.

(f) Za bilo koji $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ matrice $AA^* \in M_m(\mathbb{C})$ i $A^*A \in M_n(\mathbb{C})$ su simetrične.

(g) Ako je $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska (antihermitska) matrica, tada je to i produkt T^*AT, za svaki $T \in M_n(\mathbb{C})$.

RJEŠENJE

(a) Primijetimo da je $A = A^* \Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Posebno je $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ pa je dijagonala realna. Dakle, hermitske matrice ne čine kompleksan potprostor.

Čine realan potprostor jer za A, B hermitske i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha A + \beta B)^* \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* = \alpha A + \beta B.$$

Dimenzija tog potprostora je $n + 2(n - 1 + n - 2 + \ldots + 1) = n^2$.

(b) Primijetimo da je $-A = A^* \Leftrightarrow -a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Posebno je $-a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ pa je dijagonala čisto imaginarna. Dakle, antihermitske matrice ne čine kompleksan potprostor.

Čine realan potprostor jer za A, B antihermitske i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha A + \beta B)^* \, \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* = \alpha(-A) + \beta(-B) = -(\alpha A + \beta B) .$$

Dimenzija tog potprostora je $n + 2(n-1+n-2+\ldots+1) = n^2$ (isto kao za hermitske).

(c) Svaka se kvadratna matrica može prikazati kao suma hermitske i antihermitske matrice, a jedina matrica koja je i hermitska i antihermitska je nul-matrica. Usporediti i dimenzije.

(d) iz prethodnog

(e) npr. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

npr. $C = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 2i & i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} i & 3i \\ 3i & i \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$.

ostatak za DZ

(f) DZ

(g) DZ

Zadatak 3.8. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **dijagonalna** ako je $a_{ij} = 0$, $i \neq j$. Skup svih dijagonalnih matrica je potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije n. Dapače, on je i algebra, i to komutativna, asocijativna algebra s jedinicom.

Rješenje Neka je $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $B = \operatorname{diag}(b_{11}, \ldots, b_{nn})$. Tada je

$$\alpha A + \beta B = \operatorname{diag}(\alpha a_{11} + \beta b_{11}, \ldots, \alpha a_{nn} + \beta b_{nn}).$$

Baza tog prostora je $\{E_{ii} : i = 1, \ldots, n\}$.
Također je

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ii} \delta_{ik} b_{jj} \delta_{kj} = \begin{cases} a_{ii} b_{ii}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} .$$

Stoga je $AB = \operatorname{diag}(a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$.
Asocijativnost množenja, kvaziasocijativnost i distributivnosti naslijeđene su iz $M_n(\mathbb{F})$. Također je $I = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ i vrijedi $AI = IA = A$. Očito je

$$BA = \operatorname{diag}(b_{11}a_{11}, \ldots, b_{nn}a_{nn}) = \operatorname{diag}(a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn}) = AB.$$

DZ 3.5. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **skalarna** ako je $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Skup svih skalarnih matrica je potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije 1. Dapače, on je i algebra, i to komutativna, asocijativna s jedinicom.

Definicija 3.3. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **regularna** (**invertibilna**) ako postoji matrica $X \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $AX = XA = I$. Tada je X **inverzna matrica** ili **inverz** od A. Pišemo $X = A^{-1}$. Ako takva matrica X ne postoji, za A kažemo da je **singularna**.

Činjenice 3.4. 1. Ako A^{-1} postoji, jedinstvena je.

2. I je regularna, 0 je singularna.
3. Ako su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ regularne, tada je i AB regularna i vrijedi
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. Regularne matrice s operacijom množenja čine grupu, oznaka $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ (opća linearna grupa reda n nad $\mathbb{F}$). Ta grupa nije komutativna.

Zadatak 3.9. Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ takva da je $\det A = ad - bc \neq 0$. Dokažite da je $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i nađite A^{-1}.

Rješenje Neka je X takva da je $AX = I$. Tada je

$$AX = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_3 = 1 \\ cx_1 + dx_3 = 0 \\ ax_2 + bx_4 = 0 \\ cx_2 + dx_4 = 1 \end{cases}$$

Rješenje tog sustava je □

$$x_1 = \frac{d}{ad - bc}, \quad x_3 = \frac{-c}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{-b}{ad - bc}, \quad x_4 = \frac{a}{ad - bc}.$$

Dakle,
$$X = A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3.10. Ako je $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, onda je i $A^T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Rješenje Ako je A regularna, onda postoji X takva da je $AX = XA = I$. Ako transponiramo matrice u prethodnim jednakostima, dobivamo
$$X^T A^T = A^T X^T = I^T = I$$
pa je i A^T regularna. Iz gornjih jednakosti čitamo da je $\left(A^T\right)^{-1} = X^T = (A^{-1})^T$. □

DZ 3.6. Dokažite da je svaka matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, regularna i nađite njen inverz.

DZ 3.7. Neka su $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Primjerom pokažite da $A + B$ ne mora biti regularna.

DZ 3.8. Neka je $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Dokažite da je $\alpha A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i nađite $(\alpha A)^{-1}$.

DZ 3.9. Neka je $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Tada su $\overline{A}, A^* \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i vrijedi
$$\overline{(A^{-1})} = \left(\overline{A}\right)^{-1}, \quad \left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}.$$

DZ 3.10. Za $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i $p \in \mathbb{N}$ definiramo
$$A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p.$$

Dokažite da vrijedi
$$A^p \cdot A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

ZADATAK 3.11. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **ortogonalna** ako je $A^T A = AA^T = I$. Očito je svaka ortogonalna matrica regularna i vrijedi $A^{-1} = A^T$. Dokažite da skup svih ortogonalnih matrica $O(n, \mathbb{F})$ čini multiplikativnu grupu.

RJEŠENJE Ako su $A, B \in O(n, \mathbb{F})$, onda je $AB \in O(n, \mathbb{F})$. Doista, inverz od AB je $B^T A^T = (AB)^T$. Asocijativnost je naslijeđena iz $GL(n, \mathbb{F})$. Jedinična matrica je ortogonalna. Inverz ortogonalne matrice je opet ortogonalna matrica jer $AA^T = A^T A = I$ povlači $\left(A^T\right)^{-1} A^{-1} = A^{-1}\left(A^T\right)^{-1} = I^{-1} = I$, tj.

$$\left(A^{-1}\right)^T A^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T = I^{-1} = I.$$

PRIMJER 3.5. Primjer ortogonalne matrice $A \in O(2, \mathbb{R})$ je $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Provjerite!

ZADATAK 3.12. Neka je $A = (a_{ij}) \in O(n, \mathbb{F})$. Tada vrijedi

(a) $\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

(b) $\sum_{j=1}^n a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

RJEŠENJE Iz $AA^T = I$ slijedi

$$\delta_{ik} = I_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} {A^T}_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj}.$$

Slično iz $A^T A = I$ slijedi

$$\delta_{ik} = I_{ik} = \sum_{j=1}^n {A^T}_{ij} A_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ji} a_{jk}.$$

Uoči: posebno za $i = k$ iz (a) dobivamo da je $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1$. Za $i \neq k$ je $\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = 0$, tj. suma kvadrata elemenata nekog retka je 1, a suma produkata odgovarajućih elemenata dvaju različitih redaka je 0. Analogno za stupce iz (b).

DEFINICIJA 3.6. Za matricu A kažemo da je **involutorna** ako je $A^2 = I$.

Očito je svaka involutorna matrica regularna i vrijedi $A^{-1} = A$.

ZADATAK 3.13. Dokažite da ako matrica A ima bilo koje od sljedeća dva svojstva:

(1) A je simetrična,

(2) A je ortogonalna,

(3) A je involutorna,

onda ima i treće.

RJEŠENJE

$(1), (2) \Rightarrow (3)$: Ako je $A = A^T$ i $AA^T = A^T A = I$, onda je $A^2 = I$.

$(1), (3) \Rightarrow (2)$: Ako je $A = A^T$ i $A^2 = I$, onda je $I = A^2 = AA^T = A^T A$.

$(2), (3) \Rightarrow (1)$: Ako je $AA^T = A^T A = I$ i $AA = I$, iz jedinstvenosti inverza dobivamo da je $A^{-1} = A^T = A$ pa je $A = A^T$.

DZ 3.11. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je **unitarna** ako vrijedi

$$AA^* = A^*A = I.$$

Unitarna matrica je regularna i vrijedi $A^{-1} = A^*$. Dokažite da skup svih unitarnih matrica $U(n)$ čini multiplikativnu grupu.

DZ 3.12. Neka je $A = (a_{ij}) \in U(n)$. Dokažite:

(a) $\sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{a_{kj}} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, n$.

(b) $\sum_{j=1}^n a_{ji}\overline{a_{jk}} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, n$.

Zadatak 3.14. Dokažite da ako matrica A ima bilo koje od sljedeća dva svojstva:

(1) A je realna,

(2) A je ortogonalna,

(3) A je unitarna,

onda ima i treće.

DZ 3.13. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **idempotentna** ako je $A^2 = A$. Pokažite da je idempotentna matrica regularna ako i samo ako je jedinična.

DZ 3.14. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ takve da je $2A - B = I$. Dokažite da je matrica A idempotentna ako i samo ako je B involutorna.

Rješenje Ako je $A^2 = A$, onda imamo

$$\begin{aligned}
2A &= I + B \;/^2\\
4A^2 &= I + 2B + B^2\\
4A - 2B &= I + B^2\\
2I &= I + B^2\\
B^2 &= I.
\end{aligned}$$

Ako je $B^2 = I$, onda

$$\begin{aligned}
B &= 2A - I \;/^2\\
\cancel{B^2} &= 4A^2 - 4A + \cancel{I}\\
4A^2 &= 4A\\
A^2 &= A.
\end{aligned}$$

□

DZ 3.15. Dokažite da je inverz simetrične matrice (ako postoji) simetrična matrica.

DZ 3.16. Ako je matrica A^2 regularna, je li i A regularna?

Rješenje Da, jer ako je $A^2X = XA^2 = I$, onda je $A(AX) = (XA)A = I$. □

Poglavlje 4

Determinante

Definicija 4.1. Definiramo **determinantu** matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ kao

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}.$$

Posebno za $n = 2$ je

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

a za $n = 3$ je

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

što možemo pamtiti pomoću *Sarrusovog pravila*:

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

Napomenimo da Sarrusovo pravilo vrijedi samo za matrice reda 3, za matrice višeg reda nemamo čak ni dobar broj sumanada u formuli za determinantu!

Primjer 4.2. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje Pomoću Sarrusovog pravila: $\det = 18 + 2 + 60 - 9 - 15 - 16 = 40$. $\square$

Zbog kompliciranosti računanja determinante po definiciji, koristimo sljedeća svojstva:

Činjenice 4.3.

1. $\det A = \det A^T$, $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.
2. Ako je matrica B dobivena iz matrice A zamjenom bilo koja dva retka ili stupca, onda je $\det B = -\det A$.
3. Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem <u>jednog</u> retka ili stupca skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je $\det B = \lambda \det A$.

4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

5. Ako matrica A ima bilo koja dva retka (stupca) proporcionalna, onda je $\det A = 0$.

6. Neka su $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ matrice sa svojstvom da je za neki redak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$
$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & i = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & i \neq k \end{cases}, \quad j = 1, \ldots, n,$$
onda je $\det C = \det A + \det B$.

7. (analogno za stupce)
$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & j = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & j \neq k \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Tada je $\det C = \det A + \det B$.

8. Ako A ima nulredak ili nulstupac, onda je $\det A = 0$.

9. Općenito $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

10. Ako je matrica B dobivena iz matrice A dodavanjem nekom retku (stupcu) matrice A linearne kombinacije ostalih redaka (stupaca) matrice A, onda je $\det B = \det A$.

11. Ako je neki redak (stupac) matrice A jednak linearnoj kombinaciji preostalih redaka (stupaca) matrice A, onda je $\det A = 0$.

12. $\det I = 1$.

13.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Ukratko: pri računanju determinante koristimo **elementarne transformacije** nad matricom A:

1. Zamjena dva retka (stupca) u A,

2. Množenje nekog retka (stupca) u A skalarom $\lambda \neq 0$,

3. Pribrajanje s–tom retku (stupcu) u A r–tog retka (stupca) od A pomnoženog s $\lambda \in \mathbb{F}$.

Zadatak 4.1. Ponovo izračunajte:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{I \leftrightarrow III}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{I\cdot(-5)+II \\ I\cdot(-2)+III}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -17 & -13 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{II\cdot(-1) \\ III\cdot(-1) \\ II \leftrightarrow III}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 17 & 13 \end{vmatrix} \overset{\substack{III\cdot 7 \\ II\cdot(-17)+III}}{=} \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \cdot (1 \cdot 7 \cdot 40) = 40$$

□

4.1 Laplaceov razvoj determinante

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$. Tada je

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad \forall j = 1, \ldots, n, \tag{4.2}$$

gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, a Δ_{ij} je determinanta matrice $(n-1)$–og reda koja nastaje uklanjanjem i–tog retka i j–tog stupca iz originalne matrice A.
Jednakost (4.1) se zove **Laplaceov razvoj po i–tom retku**, a (4.2) se zove **Laplaceov razvoj po j–tom stupcu**. Determinanta Δ_{ij} se naziva **subdeterminanta** ili **minora** matrice A određena elementom a_{ij}. Broj A_{ij} se naziva **algebarski komplement** ili **kofaktor** elementa a_{ij} matrice A.
Zadatak 4.2. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

razvojem po prvom retku.
Rješenje

$$\begin{vmatrix} 4^+ & -3^- & 5^+ \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 66 + 3 \cdot (-23) + 5 \cdot (-19) = 100.$$

□

Zadatak 4.3. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

razvojem po drugom stupcu.
Rješenje

$$\begin{vmatrix} a & b^- & c \\ c & a^+ & b \\ b & c^- & a \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = -b(ca - b^2) + a(a^2 - bc) - c(ab - c^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

□

DZ 4.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

DZ 4.2.

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc + x(ab+ac+bc)$$

DZ 4.3.

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd$$

DZ 4.4.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & c & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = xyzuv$$

DZ 4.5.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

DZ 4.6. Neka su $x, y, z \neq 0$. Dokažite bez računanja determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rješenje Kao poseban slučaj se može raspisati kad je bilo koji od x, y, z jednak 0. Slijedi rješenje za slučaj $x, y, z \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{II\cdot(yz) \\ III\cdot(xz) \\ IV\cdot(xy)}}{=} \frac{1}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ xyz & 0 & yz^2 & y^2z \\ xyz & xz^2 & 0 & x^2z \\ xyz & xy^2 & x^2y & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{I:(xyz) \\ II:x \\ III:y \\ IV:z}}{=} \frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

DZ 4.7. Sami si zadavati determinante i provjeravati na www.wolframalpha.com.

4.2 Metode računanja determinanti n–tog reda

4.2.1 Svođenje na trokutasti oblik

Zadatak 4.4. Neka je A matrica reda 4 takva da su svi njezini elementi jednaki 1 ili -1. Dokažite da je broj $\det A$ djeljiv s 8.

Rješenje

...

Zadatak 4.5. Izračunajte:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Prvi redak pomnožen s -1 ćemo dodati svim ostalima.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \text{gornjetrokutasti oblik} = (-1)^{n-1}.$$

□

ZADATAK 4.6. Izračunajte:

$$D(a_1, \dots, a_n; x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Ako su neka dva od $a_1, \dots, a_n$ jednaka x, onda matrica ima dva jednaka retka pa je njena determinanta 0. Ako je $a_k = x$, za samo jedan k, pretpostavimo da je to a_1 pa imamo

$$D(x, a_2, \dots, a_n; x) = \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{prvi redak pomnožen s -1} \\ \text{dodajemo svim ostalima}}}{=} \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix}$$
$$= x(a_2 - x)(a_3 - x) \cdots (a_n - x).$$

Analogno

$$D(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n; x) = (a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_{k-1} - x)x(a_{k+1} - x) \cdots (a_n - x).$$

Ako je $a_i \neq x$, za sve $i = 1, \ldots, n$, onda imamo

$$\begin{aligned}
D(a_1,\ldots,a_n;x) &= \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ x & a_2 & x & \ldots & x \\ x & x & a_3 & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \ldots & a_n \end{vmatrix} \underset{\text{dodajemo svim ostalima}}{\overset{\text{prvi redak pomnožen s -1}}{=}} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \ldots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \ldots & a_n-x \end{vmatrix} \underset{\text{iz } k\text{–tog stupca}}{\overset{\text{izlučimo } a_k - x}{=}} \\
&= \prod_{k=1}^{n}(a_k-x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \ldots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{prvom stupcu}}{\overset{\text{sve stupce dodamo}}{=}} \\
&= \prod_{k=1}^{n}(a_k-x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} + x\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \ldots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \prod_{k=1}^{n}(a_k-x)\left(1 + x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k-x}\right).
\end{aligned}$$

ZADATAK 4.7. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{svakom drugom}}{\overset{\text{prvi redak dodamo}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 2 & 6 & \ldots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!.$$

ZADATAK 4.8. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Primijetimo da je ovaj zadatak specijalni slučaj Zadatka 4.6 pa uvrštavanjem u formulu koju smo tamo izveli dobivamo:

$$D_n = \prod_{k=1}^{n}(3-2)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3-2}\right) = 2n+1.$$

No, riješit ćemo zadatak i direktno:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \substack{\text{prvi redak oduzmemo} \\ \text{od ostalih}} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \substack{\text{prvom stupcu dodamo} \\ \text{preostale stupce}}$$

$$= \begin{vmatrix} 3+(n-1)2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2(n-1) = 2n+1.$$

□

ZADATAK 4.9. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Računamo po definiciji:

$$D_n = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

Od cijele sume ostaje jedino sumand pridružen permutaciji $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ koja ima $I(p) = n-1+n-2+\ldots+2+1 = \frac{(n-1)n}{2}$ inverzija:

$$D_n = (-1)^{I(p)} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n. \tag{4.3}$$

Determinantu smo mogli izračunati i tako da je svedemo na dijagonalni oblik pomoću zamjena stupaca (prvog i zadnjeg, drugog i predzadnjeg, itd...). Takvih zamjena treba napraviti $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ pa je

$$D_n = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

Uvjerite se da je to jednako kao i (4.3). □

Zadatak 4.10. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = \min\{i,j\}$, $i,j = 1,\dots,n$.

Rješenje

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{prvi redak pomnožen s (-k)} \\ \text{dodajemo } k\text{-tom retku}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & 3-n & 4-n & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{razvijemo po} \\ \text{zadnjem stupcu}}}{=} (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & -2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = 1.$$

Zadatak 4.11. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = |i-j|$, $i,j = 1,\dots,n$.

Rješenje Uočimo da je

$$|i-j| = \begin{cases} i-j, & i > j \text{ (donji trokut matrice } A) \\ 0, & i = j \text{ (dijagonala matrice } A) \\ j-i, & i < j \text{ (gornji trokut matrice } A) \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \ldots & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \ldots & n-5 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \ldots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \substack{\text{zadnji stupac} \\ \text{dodajemo preostalima}}$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n-3 & n-1 \\ n-1 & n-2 & n-1 & n & \ldots & 2n-5 & n-2 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-2 & \ldots & 2n-7 & n-3 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 2n-9 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \substack{\text{iz prvog stupca} \\ \text{izlučimo } n-1}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n-3 & n-1 \\ 1 & n-2 & n-1 & n & \ldots & 2n-5 & n-2 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-2 & \ldots & 2n-7 & n-3 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 2n-9 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \substack{\text{prvi stupac pomnožen s } n-k \\ \text{dodajemo } k\text{–tom stupcu}}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n-4 & n-1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & \ldots & 2n-6 & n-2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & \ldots & 2n-8 & n-3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2n-10 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \substack{\text{razvijemo po} \\ \text{zadnjem retku}}$$

$$= (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n-4 & n-1 \\ 0 & 2 & 4 & \ldots & 2n-6 & n-2 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 2n-8 & n-3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2n-10 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

□

ZADATAK 4.12. Neka su $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ proizvoljni brojevi. Izračunajte tzv. **Vandermondeovu**[1]

[1] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

determinantu:

$$D(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} D(a_1,\dots,a_n) &\underset{\substack{\text{poništimo prvi stupac}\\ \text{ispod dijagonale}\\ \text{najprije množimo } (n-1) \text{ redak}\\ \text{s } -a_1 \text{ i dodajemo zadnjem}}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{\text{množimo } (n-2) \text{ redak s } -a_1\\ \text{i dodajemo predzadnjem}}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \dots & a_{n-3}^{n-2} & a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_3^{n-3}(a_2-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-3}(a_2-a_1) & a_n^{n-3}(a_2-a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{\text{postupak ponavljamo dok ne}\\ \text{poništimo 1. stupac ispod dijagonale}}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_{n-1}-a_1 & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_1) & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-4}(a_2-a_1) & a_3^{n-4}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-4}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-4}(a_n-a_1) \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_3^{n-3}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-3}(a_n-a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{\text{razvijemo determinantu po prvom stupcu}\\ \text{i iz } k\text{–tog stupca izlučimo faktor } a_k-a_1,\ \forall k\geq 2}}{=} \\ &= \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \dots & a_{n-1}^{n-3} & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)D(a_2,\dots,a_n). \end{aligned}$$

Dobili smo determinantu istog tipa kao i početnu pa i kod nje radimo isti postupak. Dobivamo

$$\begin{aligned}
D(a_1,\dots,a_n) &= \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\prod_{k=3}^{n}(a_k-a_2)D(a_3,\dots,a_n) \\
&= \dots = \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\prod_{k=3}^{n}(a_k-a_2)\cdots\prod_{k=n-1}^{n}(a_k-a_{n-2})\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \\
&= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n}(a_j-a_i).
\end{aligned}$$

Očito je $D = 0$ ako i samo ako je $a_i = a_j$, za neke $i \neq j$. □

DZ 4.8. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = \max\{i, j\}$, $i, j = 1, \dots, n$.

DZ 4.9. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\
2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\
3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & n & n & \dots & n & n & n
\end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} n.$$

4.2.2 Metoda rekurzivnih relacija

Ideja ove metoda je da se determinanta n–tog reda, razvojem po nekom retku ili stupcu, zapiše kao linearna kombinacija determinanti reda $n-1$ i $n-2$ istog oblika.

Neka je $D_n \in \mathbb{F}$ determinanta n–tog reda, $n > 2$, i neka su $D_{n-1}, D_{n-2} \in \mathbb{F}$ determinante $(n-1)$ i $(n-2)$ reda, ali istog oblika kao D_n. Pretpostavimo da je

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

gdje su p, q konstante neovisne o n. Razlikujemo dva slučaja.

1. $q = 0$

   Tada je $D_n = pD_{n-1}$ pa je

   $$D_n = pD_{n-1} = p^2 D_{n-2} = \dots = p^{n-2} D_2.$$

   U ovom slučaju je niz determinanti (D_n) zapravo geometrijski niz s kvocijentom p.

2. $q \neq 0$

   Za ovaj slučaj pogledajmo karakterističnu jednadžbu rekurzivne relacije

   $$D_n - pD_{n-1} - qD_{n-2} = 0.$$

   To je kvadratna jednadžba $x^2 - px - q = 0$. Neka su α, β njeni korijeni. Prema Vièteovim formulama je

   $$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = -q.$$

   Sada relaciju (4.4) možemo pisati na dva načina

   $$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \beta D_{n-2}\right), \tag{4.5}$$
   $$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right). \tag{4.6}$$

   Razlikujemo dva slučaja:

(a) $\alpha \neq \beta$
Iteriranjem jednadžbi (4.5) i (4.6) dobivamo

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \beta D_{n-2}\right) = \alpha^2\left(D_{n-2} - \beta D_{n-3}\right) = \ldots = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \beta D_1\right),$$
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right) = \beta^2\left(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}\right) = \ldots = \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right).$$

Dobili smo jednadžbe

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \beta D_1\right),$$
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right).$$

Prvu jednadžbu pomnožimo s α, drugu s $-\beta$ pa ih zbrojimo:

$$(\alpha - \beta)D_n = \alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1).$$

Jer je $\alpha \neq \beta$, možemo pisati

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta},$$

odnosno

$$D_n = \underbrace{\frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}}_{=C_1}\alpha^n + \underbrace{\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\beta - \alpha)}}_{=C_2}\beta^n, \quad n \geq 2. \tag{4.7}$$

(b) $\alpha = \beta$
Sada su (4.5) i (4.6) jedna te ista relacija

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right), \quad n \geq 2, \tag{4.8}$$

pa je

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right) = \alpha^2\left(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}\right) = \ldots = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right).$$

Dakle,

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right). \tag{4.9}$$

Ta relacija vrijedi i za D_{n-1} pa je

$$D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \alpha^{n-3}\left(D_2 - \alpha D_1\right),$$

tj. $D_{n-1} = \alpha^{n-3}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha D_{n-2}$. Uvrstimo u (4.9) i dobivamo:

$$D_n = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^2 D_{n-2} + \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) = 2\alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^2 D_{n-2}. \tag{4.10}$$

Ako u (4.9) umjesto n stavimo $n-2$, dobivamo

$$D_{n-2} - \alpha D_{n-3} = \alpha^{n-4}\left(D_2 - \alpha D_1\right)$$

pa je $D_{n-2} = \alpha^{n-4}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha D_{n-3}$. Ovo uvrstimo u (4.10):

$$D_n = 2\alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^3 D_{n-3}.$$

Postupak ponavljamo i na kraju dobivamo

$$D_n = (n-1)\alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^{n-1} D_1. \tag{4.11}$$

NAPOMENA 4.4. Primijetimo da ako su $p, q, D_1, D_2 \in S$, gdje je $S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, tada je i $D_n \in S$.

ZADATAK 4.13. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$D_n \overset{\text{razvijemo determinantu}}{\underset{\text{po prvom stupcu}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{razvijemo drugu determinantu}}{\underset{\text{po prvom retku}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} + D_{n-2}.$$

Karakteristična jednadžba ove rekurzivne relacije je $x^2 - x - 1 = 0$. Njeni korijeni su

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Kako je $D_1 = |1| = 1$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ i $\alpha \neq \beta$, iz (4.7) dobivamo

$$D_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot 1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(-\sqrt{5}\right)}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}.$$

Uočimo da je, iako se možda ne bi reklo iz ovog izraza, $D_n \in \mathbb{N}$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

NAPOMENA 4.5. Ne moramo znati točnu formulu da bismo odredili D_n, već je dovoljno samo znati da je ona oblika $D_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ (ili $D_n = A \cdot \alpha^n + Bn \cdot \alpha^{n-1}$ ako je $\alpha = \beta$) pa onda uvrštavanjem konkretnih vrijednosti determinanti D_1 i D_2 za $n = 1, 2$ (ako to ima smisla) dobijemo 2×2 sustav iz kojeg kao nepoznanice dobijemo konstante A i B. Ako iz nekog razloga ne možemo uvrstiti D_1 ili D_2, onda krenemo od najmanjeg n za kojeg vrijednosti D_n i D_{n+1} imaju smisla. Također primijetite da formulu $D_n = A\cdot\alpha^n + B\cdot\beta^n$ možemo zapisati i u nekom drugom obliku koji vodi na jednostavniji sustav. Na primjer, ako je $D_n = A\cdot\alpha^{n-1} + B\cdot\beta^{n-1}$, uvrštavanjem D_n za $n = 1, 2$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} A + B = D_1 \\ \alpha A + \beta B = D_2 \end{cases}.$$

DZ 4.10. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$D_n \underset{\text{po prvom retku}}{\overset{\text{razvijemo determinantu}}{=}} 5\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{7}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{po prvom stupcu}}{\overset{\text{razvijemo drugu determinantu}}{=}} 5\tilde{D}_{n-1} - \frac{7}{2}\cdot 4\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\tilde{D}_{n-1} - 14\tilde{D}_{n-2}.$$

Sad ćemo izračunati $\tilde{D}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\tilde{D}_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{po prvom stupcu}}{\overset{\text{razvijemo determinantu}}{=}} 3\tilde{D}_{n-1} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{po prvom retku}}{\overset{\text{razvijemo drugu determinantu}}{=}} 3\tilde{D}_{n-1} - 2\tilde{D}_{n-2}.$$

Karakteristična jednadžba ove rekurzivne relacije je $x^2 - 3x + 2 = 0$. Njeni korijeni su $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Kako je $\tilde{D}_1 = |3| = 3$, $\tilde{D}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$ i $\alpha \neq \beta$, iz (4.7) dobivamo

$$D_n = \frac{1^n(7 - 2\cdot 3)}{1(1-2)} + \frac{2^n(7 - 1\cdot 3)}{2(2-1)} = 2^{n+1} - 1.$$

Konačno,

$$D_n = 5\left(2^n - 1\right) - 14\left(2^{n-1} - 1\right) = 9 - 2^{n+1}.$$

Zadatak 4.14. Izračunajte:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} D_{2n} &\underset{\text{prvom stupcu}}{\overset{\text{razvijemo po}}{=}} a\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{po zadnjem stupcu}}{\overset{\text{obje determinate razvijemo}}{=}} a^2 D_{2(n-1)} - (-1)^{2n} b^2 D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2) D_{2(n-1)} \\ &= \left(a^2 - b^2\right)^2 D_{2(n-2)} = \dots = \left(a^2 - b^2\right)^{n-1} D_2 = \left(a^2 - b^2\right)^n . \end{aligned}$$

□

Zadatak 4.15. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ n-3 & 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} D_n &\underset{\text{prvom retku}}{\overset{\text{razvoj po}}{=}} n \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ n-3 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= nx^{n-1} + D_{n-1} \underset{\text{dalje}}{\overset{\text{rekurzivno}}{=}} nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + D_{n-2} \\ &= \dots = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 3x^2 + D_2 \\ &= \sum_{k=3}^{n} kx^{k-1} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \sum_{k=3}^{n} kx^{k-1} + 2x + 1 = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}. \end{aligned}$$

Pojednostavit ćemo posljednji izraz koristeći da je $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. S druge strane je

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

DZ 4.11. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

Rješenje Razvoj po prvom retku pa po prvom stupcu pa je

$$D_n = -D_{n-2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ paran} \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}.$$

DZ 4.12. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

Rješenje Ako je n paran, onda 2., 4., …, n. redak pomnožen s -1 dodajemo prvom i dobijemo nulredak pa je $\det D_{2k} = 0$.
Ako je n neparan, onda istim postupkom dobijemo gornjetrokutasti oblik i $\det D_{2k+1} = 1$.

DZ 4.13. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

Rješenje Determinantu razvijemo po prvom stupcu i dobijemo

$$D_n = D_{n-1} - 2D_{n-1} = -D_{n-1}$$

pa je $D_n = (-1)^{n-1}$.

Zadatak 4.16. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a \end{vmatrix}$$

ako je $x \neq y$.

Rješenje Koristimo se trikom pomoću kojeg ćemo D_n izraziti na dva načina. Prisjetimo se sljedećeg pravila za računanje determinanti:

Ako su $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ matrice sa svojstvom da je za neki redak $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & i = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & i \neq k \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n,$$

onda je $\det C = \det A + \det B$.

Analogna tvrdnja vrijedi za stupce.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a-y+y \end{vmatrix} = \substack{\text{rastavimo determinantu} \\ \text{po zadnjem retku}} = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ y & y & y & \dots & y & y \end{vmatrix}$$

$$= \substack{\text{prvu determinantu razvijemo po zadnjem retku,} \\ \text{a u drugoj izlučimo } y \text{ iz zadnjeg retka}} = (a-y)D_{n-1} + y \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \substack{\text{poništimo gornji trokut množeći} \\ \text{zadnji redak s } -x} = (a-y)D_{n-1} + y \begin{vmatrix} a-x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y-x & a-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y-x & y-x & a-x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y-x & y-x & y-x & \dots & a-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-y)D_{n-1} + y(a-x)^{n-1}.$$

Sada koristimo drugi rastav.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a-x+x \end{vmatrix} = _{\substack{\text{rastavimo determinantu} \\ \text{po zadnjem retku}}} = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}$$

$$= _{\substack{\text{prvu determinantu razvijemo po zadnjem retku,} \\ \text{a u drugoj izlučimo } x \text{ iz zadnjeg stupca}}} = (a-x)D_{n-1} + x \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & 1 \\ y & a & x & \dots & x & 1 \\ y & y & a & \dots & x & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & 1 \\ y & y & y & \dots & y & 1 \end{vmatrix}$$

$$= _{\substack{\text{poništimo donji trokut množeći} \\ \text{zadnji stupac s } -y}} = (a-x)D_{n-1} + x \begin{vmatrix} a-y & x-y & x-y & \dots & x-y & 1 \\ 0 & a-y & x-y & \dots & x-y & 1 \\ 0 & 0 & a-y & \dots & x-y & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)D_{n-1} + x(a-y)^{n-1}.$$

Dobili smo

$$D_n = (a-y)D_{n-1} + y(a-x)^{n-1},$$
$$D_n = (a-x)D_{n-1} + x(a-y)^{n-1}.$$

Pomnožimo prvu relaciju s $a-x$, drugu s $-(a-y)$ pa zbrojimo i dobivamo

$$[(a-x)-(a-y)]\, D_n = (a-x)^n y - (a-y)^n x,$$

tj.

$$D_n = \frac{y(a-x)^n - x(a-y)^n}{y-x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ako je $x = y$, onda je ovo Zadatak 4.6.

DZ 4.14. Izračunajte:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ b & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ b^2 & b & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = (1-ab)^n.$$

DZ 4.15.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} = (2n-1)(n-1)^{n-1}.$$

DZ 4.16.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!.$$

DZ 4.17.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}} (n-2)!.$$

DZ 4.18.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

DZ 4.19.

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right).$$

4.2.3 Binet–Cauchyjev teorem

Činjenice 4.6. 1. Prisjetimo se Laplaceovog razvoja

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ algebarski komplement elementa a_{ij}.

2. Vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{il} = 0, \quad j \neq l \tag{4.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0, \quad i \neq k \tag{4.13}$$

3. Za $A \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$, definiramo **adjunktu**

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gdje je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij}.

4. Vrijedi
$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = (\det A)\, I. \tag{4.14}$$

5. Binet–Cauchyjev teorem: $\det(AB) = \det A \cdot \det B,\ A, B \in M_n(\mathbb{F})$.

6. Posljedice:
$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$
$$A \text{ je regularna } \Leftrightarrow \det A \neq 0, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

7. U dokazu Binet–Cauchyjevog teorema koristimo
$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B,$$
$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

   Na lijevoj strani su determinant blok–matrica, pri čemu su A i B kvadratne matrice, ne nužno istih redova.

Zadatak 4.17. Nađite $\det \tilde{A}$ i $\widetilde{\left(\tilde{A}\right)}$, za regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Rješenje Iz (4.14) dobivamo
$$\det A \cdot \det \tilde{A} \overset{BC}{=} \det\left(A \cdot \tilde{A}\right) = \det\left((\det A)\, I\right) = (\det A)^n \det I = (\det A)^n$$

pa je $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$. Posebno je $\tilde{A}$ regularna ako je A regularna.
Nadalje,
$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot \widetilde{\left(\tilde{A}\right)} &= \left(\det \tilde{A}\right) I = (\det A)^{n-1}\, I \quad / \cdot A \text{ (s lijeva)} \\ A \cdot \tilde{A} \cdot \widetilde{\left(\tilde{A}\right)} &= (\det A)^{n-1}\, A \\ \widetilde{\left(\tilde{A}\right)} &= (\det A)^{n-2}\, A. \end{aligned}$$

Zadatak 4.18. Dokažite da je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ regularna i odredite A^{-1}.

Rješenje Sjetimo se da je A regularna akko je $\det A \neq 0$. Ako $\det A$ razvijemo po trećem stupcu, odmah vidimo da je $\det A = 1 \neq 0$.
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.19 (Posljedice Binet–Cauchyjevog teorema).

a) Za $A_1, A_2, \ldots, A_r \in M_n(\mathbb{F})$, $r \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_r) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_r.$$

b) Za $A \in M_n(\mathbb{F})$ je $\det A^r = (\det A)^r$, $r \in \mathbb{N}$.

c) Za $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ je $\det AB = \det BA$.

d) Ako je $A \in O(n, \mathbb{F})$, onda je $\det A = \pm 1$.

e) Ako je $A \in U(n)$, onda je $|\det A| = 1$.

RJEŠENJE

a) indukcijom po r

d) A je ortogonalna ako i samo ako je $AA^T = A^T A = I$ pa je

$$1 = \det I = \det\left(AA^T\right) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2.$$

e) A je unitarna ako i samo ako je $AA^* = A^* A = I$ pa je

$$1 = \det I = \det(AA^*) = \det A \cdot \det \overline{A^T} = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2.$$

□

NAPOMENA 4.7. Tvrdnja za determinantu blok–trokutaste matrice indukcijom se proširuje i na proizvoljan broj blokova pa vrijedi:

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} = \det A_{11} \cdot \det A_{22} \cdots \det A_{nn} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

pri čemu su A_{11}, A_{22}, …, A_{nn} kvadratni blokovi.

ZADATAK 4.20. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ proizvoljna matrica. Nađite $\det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}$.

RJEŠENJE Iskoristimo tvrdnju o determinanti blok–trokutastih matrica i način na koji se množe blok–matrice. Vrijedi

$$\det\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det I \cdot \det I = 1.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \overset{BC}{=} \det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

jer matrica $\begin{pmatrix} A & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix}$ ima nulstupac. □

ZADATAK 4.21. Izračunajte $\det \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix}$, gdje je D kvadratna matrica.

RJEŠENJE Koristimo $\det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det I \cdot \det I = 1$ pa je

$$\det \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} \overset{BC}{=} \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D - CB \end{pmatrix} = \det I \cdot \det(D - CB) = \det(D - CB).$$

DZ 4.20. Izračunajte $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix}$, gdje je A kvadratna matrica.

RJEŠENJE Opet koristimo $\det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} = 1$ pa je

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix} \overset{BC}{=} \det \begin{pmatrix} A - BC & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \det(A - BC) \cdot \det I = \det(A - BC).$$

ZADATAK 4.22. Neka za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $AB = BA$ te neka je A regularna. Odredite $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

RJEŠENJE Sjetimo se da je A regularna akko je $\det A \neq 0$ i primijetimo da je $\det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det A$. Stoga je

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det A} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \\
&\overset{BC}{=} \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & DA - CB \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det A} \cdot \det A \cdot \det(DA - CB) = \det(DA - CB).
\end{aligned}$$

DZ 4.21. Neka za matrice $A, C \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $AC = CA$ te neka je A regularna. Dokažite da je tada

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Uputa: $\det A = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A \end{pmatrix} \neq 0$. Matricu $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ s lijeva množimo s $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}$.

Poglavlje 5

Rang matrice

Definicija 5.1. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i neka su $S_1, \ldots, S_n \in M_{m1}(\mathbb{F})$ stupci od A. **Rang matrice** A definira se kao $\dim [S_1, \ldots, S_n]$. Oznaka $r(A)$.

Činjenice 5.2.

1. $r(A) \leq m, n$. Očito je $r(A) \leq n$, a $r(A) \leq m$ jer je $\dim M_{m1}(\mathbb{F}) = m$.
2. Riječima: Rang je broj linearno nezavisnih stupaca od A.
3. $r(A) = 0$ ako i samo ako je $A = 0$. $r(I_n) = n$.

Zadatak 5.1. Odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje Stupci matrice A su $S_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $S_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $S_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Odmah se vidi da je $S_2 = -2S_1$ i S_1, S_3 su linearno nezavisni. Dakle, $r(A) = 2$. $\square$

Teorem 5.3. *Broj linearno nezavisnih redaka od $A \in M_n(\mathbb{F})$ jednak je broju linearno nezavisnih stupaca, tj. "rang po retcima jednak je rangu po stupcima".*

Zadatak 5.2. Utvrdite rang po retcima matrice A iz prethodnog zadatka.

Rješenje Retci matrice A su $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $R_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $R_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Očito su R_1 i R_2 linearno nezavisni. Pretpostavimo da je $R_3 = \alpha R_1 + \beta R_2$. Tada je

$$\begin{aligned} -2 &= \alpha + 2\beta \\ 4 &= -2\alpha - 4\beta \\ 1 &= \alpha \end{aligned}$$

Rješenje je $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{3}{2}$ pa je $R_3 = R_1 - \frac{3}{2}R_2$. Dakle, $r(A) = 2$. $\square$

Činjenice 5.4.

1. Primjenom elementarnih transformacija rang matrice se ne mijenja.
2. Kažemo da je matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ekvivalentna matrici $B =\in M_{mn}(\mathbb{F})$ ako se A može dobiti iz B primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka i stupaca. Pišemo $A \sim B$.
3. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $M_{mn}(\mathbb{F})$.
4. Za $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A \sim B$ povlači da je $r(A) = r(B)$.

5. Neka je $r = 0, 1, \ldots, \min\{m, n\}$. Matrica $D_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ (r jedinica) zove se **kanonska matrica tipa** $m \times n$ **ranga** r. Na primjer, sve matrice $D_r \in M_{23}(\mathbb{F})$ su

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Ako je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $r(A) = r$, onda je $A \sim D_r \in M_{mn}(\mathbb{F})$.

7. Za $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je $A \sim B$ ako i samo ako je $r(A) = r(B)$.

ZADATAK 5.3. Odredite $r(A)$ iz Zadatka 5.1 primjenom elementarnih transformacija.

RJEŠENJE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D_2.$$

Dakle, $r(A) = 2$.

ZADATAK 5.4. Odredite $r(A)$ za $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim D_3.$$

Dakle, $r(A) = 3$.

DZ 5.1. Odredite $r(A)$ za

1. $A = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

2. $A = \begin{bmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 2)$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 6 & 6 & 0 & 20 & 19 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

Zadatak 5.5. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite $r(A)$ za $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda - 12 & 0 & 6 & -15 \\ -20 & 0 & 10 & -25 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda - 12 & 0 & 6 & -15 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & \frac{13}{2} \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$r(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = 0 \\ 3, & \lambda \neq 0 \end{cases}.$$

□

DZ 5.2. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 2$ za $\lambda = 3$, inače je $r(A) = 3)$,

2. $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{bmatrix}$ $(r(A) = 2$ za $\lambda = 0$, inače je $r(A) = 3)$,

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3$ za sve $\lambda)$.

Zadatak 5.6. Neka su dani vektori $a_1, \ldots, a_k, b \in \mathbb{F}^n$. Dokažite da je b jednak linearnoj kombinaciji vektora $a_1, \ldots, a_k$ ako i samo ako je

$$r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & b \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}\right).$$

Rješenje

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je b jednak linearnoj kombinaciji vektora $a_1, \ldots, a_k$. Tada je $b \in [a_1, \ldots, a_k]$ pa je sigurno $[a_1, \ldots, a_k] = [a_1, \ldots, a_k, b]$. Zaista, uvijek je $[a_1, \ldots, a_k] \leq [a_1, \ldots, a_k, b]$, dok obratna inkluzija slijedi iz

$$\begin{aligned} x \in [a_1, \ldots, a_k, b] \Rightarrow x &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \beta b, \text{ za } b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \beta \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta\lambda_i)\, a_i \\ \Rightarrow x &\in [a_1, \ldots, a_k]\,. \end{aligned}$$

Vektore $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}^n$ možemo shvatiti kao stupce pa dobivamo matrice $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & b \end{bmatrix}$. Njihovi rangovi su po definiciji

$$r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}\right) = \dim [a_1, \ldots, a_k] = \dim [a_1, \ldots, a_k, b] = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & b \end{bmatrix}\right).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & b \end{bmatrix}\right)$. Tada je i $\dim [a_1, \ldots, a_k] = \dim [a_1, \ldots, a_k, b]$. Iz toga i činjenice da je $[a_1, \ldots, a_k] \leq [a_1, \ldots, a_k, b]$, slijedi da je $[a_1, \ldots, a_k] = [a_1, \ldots, a_k, b]$. Specijalno je $b \in \dim [a_1, \ldots, a_k]$, odnosno b je linearna kombinacija vektora $a_1, \ldots, a_k$.

Zadatak 5.7. Provjerite jesu li vektori $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$ linearno nezavisni.

Rješenje Vektori a_1, a_2, a_3 su linearno nezavisni ako i samo ako je $\dim [a_1, a_2, a_3] = 3$. Pogledajmo matricu $A = \begin{bmatrix} a_1^T & a_2^T & a_3^T \end{bmatrix}$ i odredimo njen rang.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -27 & -21 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -9 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ -9 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ -9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $r(A) = 2$ pa su a_1, a_2, a_3 linearno zavisni.

Zadatak 5.8. U $\mathbb{R}^5$ zadani su potprostori M i N razapeti vektorima $M = [\{a_1, a_2, a_3\}]$, $a_1 = (1, 0, 2, 4, 7)$, $a_2 = (-4, 2, 8, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 0, 9)$, $N = [\{b_1, b_2, b_3\}]$, $b_1 = (2, 2, -1, 4, 9)$, $b_2 = (4, -4, 12, 1, 6)$, $b_3 = (1, 4, 1, 5, -5)$. Odredite $\dim M$, $\dim N$, $\dim(M + N)$, $\dim(M \cap N)$.

Rješenje Primijetimo da je $\dim M$ jednaka broju linearno nezavisnih vektora među vektorima a_1, a_2, a_3, a $\dim N$ je jednaka broju linearno nezavisnih vektora među vektorima b_1, b_2, b_3. Te vektore možemo shvatiti kao stupce nekih matrica pa su rangovi tih matrica jednaki dimenzijama odgovarajućih prostora.

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & -2 \\ 0 & 17 & -4 \\ 0 & 29 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(M) = 3$, tj. $\dim M = 3$.

$$N := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 12 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -6 & -20 & 0 \\ -3 & 8 & 0 \\ -6 & -19 & 0 \\ 19 & 26 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \\ -\frac{27}{5} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(N) = 3$, tj. $\dim N = 3$.
$M + N = [\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}]$ pa gledamo matricu

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & 8 & 0 & -1 & 12 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 9 & 9 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 16 & -2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 17 & -4 & -4 & -15 & 1 \\ 0 & 29 & 2 & -5 & -22 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 20 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 25 & 0 & 4 & -31 & 17 \\ 0 & 25 & 0 & -9 & -14 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 42 & 1 & 0 & -12 & 18 \\ 0 & 20 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -47 & 45 \\ 0 & -155 & 0 & 0 & 22 & -79 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -47 & 45 \\ 0 & -155 & 0 & 0 & 22 & -79 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105 & -47 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & -155 & 22 & -79 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105 & -47 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{265}{7} & -\frac{88}{7} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $r(X) = 5$ pa je $\dim M + N = 5$. Konačno je

$$\dim(M \cap N) = \dim M + \dim N - \dim(M + N) = 3 + 3 - 5 = 1.$$

□

Zadatak 5.9. Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (7, -2, \lambda)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$?

Rješenje Zadatak 5.6 kaže da je b linearna kombinacija vektora a_1, a_2, a_3 ako i samo ako je $r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$. Odredimo najprije $r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 15 & 25 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(A) = 2$.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 15 & 25 & 0 & 40 \\ 3 & 5 & 0 & \lambda - 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 0 & \lambda - 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 15 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 15 \end{bmatrix}.$$

Očito je $r(\tilde{A}) = 2$ ako i samo ako je $\lambda = 15$. □

Zadatak 5.10. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A \neq 0$, proizvoljna fiksna matrica. Definiramo preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = r(tA)$. Dokažite da φ nije neprekidno preslikavanje.

RJEŠENJE Za $t = 0$ je $\varphi(tA) = \varphi(0) = 0$.
Neka je $t \neq 0$. Tada je $tA \neq 0$ pa je $r(tA) \geq 1$ (zapravo je $r(tA) = r(A)$). Stoga φ ima prekid u $t = 0$. $\square$

DZ 5.3. Ispitajte linearnu nezavisnost vektora $b_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $b_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $b_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $b_4 = (2, -3, 4, 11, 1)$.

DZ 5.4. Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (5, 9, \lambda)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$? (rj: $\lambda \in \mathbb{R}$)

DZ 5.5. Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (\lambda, 2, 5)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (3, 2, 6)$, $a_2 = (7, 3, 9)$, $a_3 = (5, 1, 3)$? (rj: takav λ ne postoji)

Poglavlje 6

Inverz

Činjenice 6.1. 1. **Elementarne matrice** n–tog reda su

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&& \\ && \ddots &&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&& \\ &&&& 0 & \dots & 1 &&& \\ &&&& \vdots & \ddots & \vdots &&& \\ &&&& 1 & \dots & 0 &&& \\ &&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}, \qquad i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j$$

$$F_i^\lambda = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \underbrace{\lambda}_{i\text{–to mjesto}}, 1, \dots, 1), \qquad \lambda \neq 0$$

$$F_{ij}^\lambda = I + \lambda E_{ij}.$$

Množenjem matrice A s elementarnim matricama s lijeve odnosno desne strane realiziraju se elementarne transformacije redaka odnosno stupaca matrice A. Preciznije

(i) zamjena i–tog i j–tog retka (stupca): $F_{ij}A$ (AF_{ij}),

(ii) množenje i–tog retka (stupca) skalarom $\lambda \neq 0$: $F_i^\lambda A$ (AF_i^λ),

(iii) pribrajanje j–tog retka (i–tog stupca) pomnoženog s λ i–tom retku (j–tom stupcu): $F_{ij}^\lambda A$ (AF_{ij}^λ).

2. Sve elementarne matrice su regularne i vrijedi

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij}, \quad \left(F_i^\lambda\right)^{-1} = F_i^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \left(F_{ij}^\lambda\right)^{-1} = F_{ij}^{-\lambda}.$$

3. $A \in M_n(\mathbb{F})$ je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$.

4. $A \in M_n(\mathbb{F})$ je regularna ako i samo ako je A produkt (konačnog broja) elementarnih matrica $A = E_k \cdots E_1 I F_1 \cdots F_l$ $(D_n = I)$.

5. $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ su ekvivalentne ako i samo ako postoje regularne matrice $S \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{F})$, $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ takve da je $B = SAT$.

Zadatak 6.1. Regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ možemo elementarnim transformacijama samo po retcima svesti na matricu I.

Rješenje A je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$, tj. A ima sve stupce linearno nezavisne. Specijalno, nema nijedan nul–stupac.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Kako } A \text{ nema nulstupac, u prvom stupcu postoji element } a_{i1} \neq 0. \\ \text{Dovedimo ga na mjesto } (1,1) \text{ zamjenom 1. i } i\text{–tog retka}\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Elementom } a_{i1} \text{ poništimo prvi stupac.} \\ \text{Dobijemo matricu } A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right) \text{ koja ima rang } n\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Prvi i drugi stupac matrice } A_2 \text{ nisu linearno zavisni pa postoji} \\ \text{indeks } i_2 \geq 2 \text{ takav da je } a_{i_2 2} \neq 0. \text{ Zamijenimo } i_2\text{–ti i 2. redak} \\ \text{i poništimo drugi stupac u } A_2 \text{ s elementom } a_{i_2 2}.\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & \dots & a_{1n}^{(3)} \\ 0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Postupak nastavljamo dok ne dođemo} \\ \text{do dijagonalne matrice}\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(n)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \sim i\text{–ti redak pomnožimo s } \left(a_{ii}^{(n)}\right)^{-1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I$$

Napomena 6.2. Elementarne transformacije nad retcima realiziramo množenjem matrice A s lijeva elementarnim matricama. Prema tome, za svaku regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ postoje elementarne matrice $S_1, \dots, S_n$ takve da je $I = S_n \cdots S_1 A$. Zbog jedinstvenosti inverza je

$$A^{-1} = S_n \cdots S_1.$$

Napišemo li zadnji izraz kao $A^{-1} = S_n \cdots S_1 I$, dobivamo metodu za invertiranje matrica: istovremeno elementarnim transformacijama nad A i I iz A dobivamo I, a iz I dobivamo A^{-1}. Dakle,

$$\left(A \,\vdots\, I \right) \sim \cdots \sim \left(I \,\vdots\, A^{-1} \right).$$

Zadatak 6.2. Odredite inverz od $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje

$$\left(A \,\vdots\, I \right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(I \,\vdots\, A^{-1} \right).$$

Dakle, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. □

Napomena 6.3. Posve analogno možemo dokazati da provođenjem elementarnih transformacija <u>nad stupcima</u> regularne matrice A možemo doći do jedinične matrice I. Elementarne transformacije nad stupcima realiziraju se množenjem <u>zdesna</u> elementarnim matricama. Dakle, postoje elementarne matrice $F_1, \ldots, F_k$ takve da je $AF_1F_2\cdots F_k = I$ pa je

$$A^{-1} = F_1F_2\cdots F_k = IF_1F_2\cdots F_k.$$

Stoga A^{-1} dobivamo iz I istim elementarnim transformacijama nad stupcima koje A prevode u I.

Zadatak 6.3. Odredite inverz od $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ elementarnim transformacijama nad stupcima.

Rješenje

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hdashline I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} I \\ \hdashline A^{-1} \end{array}\right).$$

□

Zadatak 6.4. Kako se mijenja inverz ako matrici A:

(a) zamijenimo i–ti i j–ti redak?

(b) i–ti redak pomnožimo s $\lambda \neq 0$?

(c) i–ti redak pomnožen s λ dodamo j–tom retku?

Rješenje

(a) $(F_{ij}A)^{-1} = A^{-1}F_{ij}^{-1} = A^{-1}F_{ij}$,

(b) $\left(F_i^{\lambda}A\right)^{-1} = A^{-1}\left(F_i^{\lambda}\right)^{-1} = A^{-1}F_i^{\frac{1}{\lambda}}$,

(c) $\left(F_{ij}^{\lambda}A\right)^{-1} = A^{-1}\left(F_{ij}^{\lambda}\right)^{-1} = A^{-1}F_{ij}^{-\lambda}$.

□

DZ 6.1. Kako se mijenja inverz ako matrici A:

(a) zamijenimo i–ti i j–ti stupac?

(b) i–ti stupac pomnožimo s $\lambda \neq 0$?

(c) i–ti stupac pomnožen s λ dodamo j–tom stupcu?

DZ 6.2. Odredite inverz sljedećim matricama:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = (\alpha_{ij}), \alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ 1, & i = j \\ (-1)^{i+j}, & i < j \end{cases}.$$

6.1 LU faktorizacija

Činjenice 6.4. 1. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ matrica koja se elementarnim transformacijama, ali bez zamjene redaka, može dovesti do gornjetrokutaste matrice. Tada postoje matrice $L, U \in M_n(\mathbb{F})$, pri čemu je L donjetrokutasta s jedinicama na glavnoj dijagonali, a U gornjetrokutasta, takve da vrijedi

$$A = LU.$$

2. Ako matrica A pri prevođenju na gornjetrokutastu matricu zahtijeva zamjenu redaka, to možemo načiniti unaprijed: neka je PA matrica koja ne zahtijeva zamjenu redaka, gdje je P permutacijska matrica nad retcima. Tada vrijedi

$$PA = LU.$$

3. Postupak je sljedeći: neka su $E_1, \ldots, E_p$ elementarne matrice (koje ne sadrže F_{ij}) takve da je
$$E_p \cdots E_1 A = U \text{ (gornjetrokutasta)}.$$
Primijetimo da su $E_1, \ldots, E_p$ donjetrokutaste matrice s jedinicama na dijagonali pa je takav i njihov produkt i inverz tog produkta (inverz postoji jer su elementarne matrice regularne). Imamo
$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U =: LU.$$

Sljedeći primjer pokazuje kako odrediti L.

Primjer 6.5.
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 12 \end{matrix} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U$$

Od stupaca $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix}$ "normiranih" tako da su na dijagonali 1, stvaramo L:
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Očito se iz L istim elementarnim transformacijama nad retcima dobiva I. Pritom vrijedi $A = LU$.

Zadatak 6.5. Odredite LU–faktorizaciju matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U.$$

Stupci $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$ određuju $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Provjera:
$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

□

Napomena 6.6. LU–faktorizaciju koristimo pri rješavanju sustava $Ax = b$. Taj sustav možemo zapisati kao $L(Ux) = b$. Ako uvedemo supstituciju $y = Ux$, onda se rješavanje polaznog sustava svodi na rješavanje sustava
$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases},$$
pri čemu su L, U trokutaste matrice.

ZADATAK 6.6. Riješite sustav $Ax = b$, gdje je A iz zadatka 6.5, a $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

RJEŠENJE Najprije riješimo sustav $Ly = b$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} y_1 &= -7 \\ -y_1 + y_2 &= 5 \\ 2y_1 - 5y_2 + y_3 &= 2 \end{aligned}$$

čije rješenje je $y = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Sada možemo riješiti sustav $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= -7 \\ -2x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_3 &= 6 \end{aligned}$$

čije rješenje je $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Složenost LU dekompozicije je $O(N^3)$, isto kao i složenost Gaussove metode eliminacije za rješavanje sustava. Stoga se postavlja pitanje koja je prednost LU dekompozicije. Do prednosti dolazi kad moramo više puta rješavati sustav koji ima istu matricu koeficijenta, ali različite slobodne koeficijente. Naime, ako imamo faktoriziranu matricu koeficijenata, samo moramo napraviti supstitucije unaprijed i unazad da bismo riješili sustav. Ta operacija ima složenost $O(N^2)$. Ako je moramo ponoviti k puta, Gaussova eliminacija bi nam dala ukupnu složenost $O(kN^3)$, a pristup preko LU dekompozicije $O(N^3 + kN^2)$ jer moramo dekompoziciju napraviti samo jednom, a onda k puta supstitucije.
Možda bismo na prvu pomislili da je prostorna složenost Gaussove metode bolja jer radimo samo s jednom matricom, a kod LU dekompozicije imamo dvije matrice iste veličine. No, znamo da je L donjetrokutasta i U gornjetrokutasta pa kod L moramo samo pamtiti (strogi) donji trokut (jedinice su na dijagonali i to ne moramo spremiti u memoriju), a kod U moramo pamtiti samo gornji trokut. Dakle, pamtimo isti broj elemenata kao i kod A.

Poglavlje 7

Sustavi linearnih jednadžbi

Činjenice 7.1. 1. Opći sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{F}$ je

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Skalari a_{ij} se zovu **koeficijenti sustava**, a $b_1, \ldots, b_m$ **slobodni koeficijenti**. **Rješenje sustava** je svaka uređena n–torka $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ za koju supstitucija $x_1 = \gamma_1, \ldots, x_m = \gamma_m$ zadovoljava sve jednakosti.

2. Matrični zapis sustava dan je s $AX = B$, gdje je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Prirodna identifikacija $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ je bijekcija skupa svih rješenja sustava na skup rješenja matrične jednadžbe.

3. Kod sustava nas zanimaju tri stvari:

   (1) Kada je sustav rješiv?

   (2) Opisati rješenje!

   (3) Naći metodu!

   (1)

   Teorem 7.2 (Kronecker–Capelli). *Sustav je rješiv ako i samo ako je $r(A) = r(A_p)$, gdje je*

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Svaki homogen sustav $AX = 0$ je rješiv.

(2) Skup svih rješenja homogenog sustava $AX = 0$ je vektorski prostor. Skup svih rješenja nehomogenog sustava $AX = B$ je linearna mnogostrukost

$$C_0 + \Omega = \{C_0 + C : C \in \Omega\},$$

gdje je C_0 bilo koje rješenje sustava $AX = B$, a Ω je prostor rješenja pridruženog homogenog sustava $AX = 0$.

Ako je $\{C_1, \ldots, C_d\}$ baza za Ω (tzv. **fundamentalni skup rješenja**), tada je proizvoljno rješenje sustava $AX = B$ oblika

$$C_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i C_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{F}.$$

Pritom vrijedi $d = n - r$, $r = r(A)$.

(3) Metoda: Gaussova metoda eliminacije. Elementarnim transformacijama nad <u>retcima</u> matrice A_p, matricu A_p svodimo na

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccccccc:c} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,r+1} & \ldots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2,r+1} & \ldots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{r,r+1} & \ldots & a'_{r,n} & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ako je sustav rješiv, u zadnjem stupcu na mjestima $r + 1, \ldots, m$ su nule. Vidimo da je jedno partikularno rješenje dano s

$$C_0 = (b'_1, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0).$$

Treba još naći bazu prostora rješenja pripadnog homogenog sustava. Iščitavamo je iz gornje matrice (uz $b'_1 = \ldots = b'_r = 0$).

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(-a'_{1,r+1}, -a'_{2,r+1}, \ldots, -a'_{r,r+1}, 1, 0, \ldots, 0\right) \\ C_2 &= \left(-a'_{1,r+2}, -a'_{2,r+2}, \ldots, -a'_{r,r+2}, 0, 1, \ldots, 0\right) \\ &\vdots \\ C_{n-r} &= \left(-a'_{1,n}, -a'_{2,n}, \ldots, -a'_{r,n}, 0, 0, \ldots, 1\right). \end{aligned}$$

7.1 Cramerov sustav

Sustav je **Cramerov** ako je $m = n$ i matrica sustava A je regularna ($\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$). Cramerov sustav je uvijek rješiv i rješenje mu je $C = A^{-1}B$, odnosno

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je $D = \det A$, a D_i je determinanta matrice u kojoj je i–ti stupac B, a ostali su isti kao u matrici A.

ZADATAK 7.1. Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 3x_3 + \ \ 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + \ \ 5x_2 + \ \ 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$$

RJEŠENJE

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tj. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. □

ZADATAK 7.2. Riješite sustav

$$\begin{cases} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 = 84 \\ \ \ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 = 72 \\ \ \ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 = 59 \end{cases}$$

RJEŠENJE

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 105 & -175 & -315 & 245 & 84 \\ 90 & -150 & -270 & 210 & 72 \\ 75 & -125 & -225 & 175 & 59 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{12}{5} \\ 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{12}{5} \\ 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{59}{25} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{25} \end{array}\right).$$

Primijetimo da je $r(A) \neq r(A_p)$ pa sustav nema rješenja. □

ZADATAK 7.3. Riješite sustav

$$\begin{cases} \ \ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ \ \ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ \ \ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 & \text{-1} \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -13 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & -58 & -14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 29 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zadatak 7.4. Riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 2 & -25 & -27 \\ 0 & 4 & -50 & -54 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 2 & -25 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 0 & \text{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posljednji sustav možemo zapisati kao

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

odakle slijedi $x_1 = x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = -x_4$. Stavimo $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$, pa je rješenje

$$x = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ZADATAK 7.5. Riješite sustav

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 + 2x_4 = 1 \\ \qquad\ \ - \ \ x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

RJEŠENJE

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zadnji sustav možemo zapisati kao

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\qquad\quad = 2 \\ \qquad - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

što daje $x_1 = 2 + x_2$, $x_3 = 3 + x_2 - 2x_4$. Ako stavimo $x_2 = t$, $x_4 = s$, za $t, s \in \mathbb{R}$, rješenje možemo zapisati kao

$$x = \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 3+t-2s \\ s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{partikularno rješenje} \\ \text{sustava}}} + \underbrace{t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{opće rješenje} \\ \text{pripadnog homogenog sustava}}}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

□

DZ 7.1. Riješite sustave

(a)

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 - \ \ x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 - \ \ x_5 = 0 \\ 4x_1 + \ \ x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 0 \\ x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \ \ x_5 = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ -2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + 4x_4 \qquad = -3 \\ 5x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 \qquad = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 \qquad = 0 \end{cases}$$

7.2 Sustavi u ovisnosti o parametru

ZADATAK 7.6. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 1 \\ x_1 \qquad\ - \ \ x_3 + \ \ x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + \lambda x_4 = 3 \\ \qquad\ \ x_2 + \lambda x_3 + \ \ x_4 = 1 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\lambda-4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Jedini preostali pivotni element je $-\lambda^2 - \lambda$ pa razlikujemo slučajeve:

1.) $-\lambda^2 - \lambda = 0$, tj. $\lambda \in \{0, -1\}$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\lambda-4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

tj. $x_1 - (\lambda+4)x_3 = 2$, $x_2 - 3x_3 = 1$, $(\lambda+3)x_3 + x_4 = 0$. Stavimo $x_3 = t$ pa dobivamo

$$x = \begin{pmatrix} 2+(\lambda+4)t \\ 1+3t \\ t \\ -(\lambda+3)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \lambda+4 \\ 3 \\ 1 \\ -(\lambda+3) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.) $-\lambda^2 - \lambda \neq 0$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\lambda-4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

pa imamo Cramerov sustav koji ima jedinstveno rješenje $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zadatak 7.7. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav

$$\begin{cases} (\lambda+4)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda+4)y + z = \lambda+3 \\ x + y + (\lambda+4)z = (\lambda+3)^2 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc:c} \lambda+4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+4 & 1 & \lambda+3 \\ 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \\ \lambda+4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+4 & 1 & \lambda+3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \\ 0 & -(\lambda+3) & -(\lambda+3)(\lambda+5) & 1-(\lambda+4)(\lambda+3)^2 \\ 0 & \lambda+3 & -(\lambda+3) & -(\lambda+3)(\lambda+2) \end{array}\right)$$

Razlikujemo slučajeve

1.) $\lambda + 3 = 0$, tj. $\lambda = -3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

odakle slijedi da sustav nema rješenja.

2.) $\lambda \neq -3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \\ 0 & -1 & -(\lambda+5) & \frac{1}{\lambda+3} - (\lambda+4)(\lambda+3) \\ 0 & 1 & -1 & -(\lambda+2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{\lambda+3} - (\lambda+3) \\ 0 & 1 & \lambda+5 & (\lambda+4)(\lambda+3) - \frac{1}{\lambda+3} \\ 0 & 0 & -(\lambda+6) & \frac{1}{\lambda+3} - (\lambda^2+8\lambda+14) \end{array}\right)$$

Diskutiramo slučajeve po $\lambda + 6$

a) $\lambda + 6 = 0$, tj. $\lambda = -6$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{array}\right)$$

pa sustav nema rješenja.

b) $\lambda \neq -6$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{\lambda+3} - (\lambda+3) \\ 0 & 1 & \lambda+5 & (\lambda+4)(\lambda+3) - \frac{1}{\lambda+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^2+8\lambda+14}{\lambda+6} - \frac{1}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2+6\lambda+7}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\lambda+5}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^3+11\lambda^2+38\lambda+41}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \end{array}\right).$$

Sustav je Cramerov i njegovo (jedinstveno) rješenje je

$$x = \frac{1}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \begin{pmatrix} -(\lambda^2+6\lambda+7) \\ 2\lambda+5 \\ \lambda^3+11\lambda^2+38\lambda+41 \end{pmatrix}.$$

□

Zadatak 7.8. Odredite polinom 3. stupnja koji prolazi točkama $(1,-2)$, $(2,-4)$, $(3,-2)$ i $(4,10)$.

Rješenje Tražimo polinom oblika $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Uvrštavanjem danih točaka, dobivamo sustav

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -4 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -2 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 10 \end{cases}$$

Determinanta ovog sustava je transponirana Vandermondeova determinanta, a znamo da je ona $\neq 0$ ako i samo ako su brojevi koji je definiraju međusobno različiti, što je ovdje slučaj. Dakle, naš sustav je Cramerov i ima jedinstveno rješenje. Možemo ga riješiti ili pomoću determinanti ili putem Gaussove metode eliminacije. Rješenje je $a_0 = -2$, $a_1 = 3$, $a_2 = -4$, $a_3 = 1$, tj. traženi polinom je $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$. □

DZ 7.2. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustave

(a)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases},$$

(b)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases},$$

(c)

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases},$$

(d)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9 \end{cases},$$

Rješenje

(a) Za $\lambda = 8$ imamo rješenje

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Za $\lambda = 0$ nema rješenja. Za $\lambda \neq 0$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4-\lambda}{5\lambda} \\ \frac{9\lambda-16}{5\lambda} \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Za $\lambda \neq 1, -3$ sustav ima jedinstveno rješenje $x = \frac{1}{\lambda+3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Za $\lambda = 1$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda = -3$ nema rješenja.

(d) Za $\lambda = 8$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix}0\\\frac{4}{3}\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\\0\\0\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$