MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

ZADATAK 1

(23 boda) Neka je $S \subseteq M_2(\mathbb{R})$ dan s

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{bmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Dokažite da S nije vektorski potprostor od $M_2(\mathbb{R})$ te odredite jednu bazu za $[S]$.

(b) Dokažite da je

$$M = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, AX = XA,\ \forall A \in [S]\}$$

vektorski potprostor od $M_2(\mathbb{R})$ te mu odredite jednu bazu.

Rješenje:

(a) S nije potprostor od $M_2(\mathbb{R})$ jer ne sadrži nulmatricu. Nadalje, vidimo kako je

$$S \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \leq M_2(\mathbb{R}).$$

Kako je

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq S,$$

te se lako vidi da su navedene matrice linearno nezavisne, slijedi da je $\dim[S] \geq 3$, pa zbog prethodnog konačno dobivamo

$$[S] = [\{E_{11}, E_{12}, E_{21}\}].$$

(b) Neka su $X, Y \in M$ te $A \in [S]$ proizvoljni. Tada je zbog svojstava množenja matrica

$$(\alpha X + \beta Y)A = \alpha(XA) + \beta(YA) = \alpha(AX) + \beta(AY) = A(\alpha X + \beta Y),$$

pa zaključujemo da je $M \leq M_2(\mathbb{R})$. Primijetimo nadalje kako je ponovno zbog distributivnosti množenja matrica

$$X \in M \iff X \text{ komutira s } E_{11}, E_{12}, E_{21}.$$

Nužnost uvjeta je očita. S druge strane, svaka $A \in [S]$ se može prikazati u obliku $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21}$, pa imamo

$$AX = (aE_{11}+bE_{12}+cE_{21})X = aE_{11}X+bE_{12}X+cE_{21}X = aXE_{11}+bXE_{12}+cXE_{21} = XA.$$

Testiranjem uvjeta komutiranja na prve dvije matrice, E_{11} i E_{12} već dobijemo

$$X \in M \implies X \in [\{I\}],$$

pa kako skalarne matrice komutiraju s cijelim $M_2(\mathbb{R})$ slijedi

$$M = [\{I\}].$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

ZADATAK 2

(a) (15 bodova) Zadani su potprostori M i N vektorskog prostora $\mathbb{C}^3$ nad poljem $\mathbb{R}$:

$$M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \overline{z_1} + iz_2 - z_3 = 0\},$$
$$N = [\{(2i, i, -2), (1+i, 0, 1-i), (-2i, 1, 1+i)\}].$$

Odredite po jednu bazu za $M + N$ i $M \cap N$.

(b) (5 bodova) Ako je M potprostor od $\mathbb{C}^n$ nad poljem $\mathbb{C}$ dimenzije k, dokažite da je M potprostor od $\mathbb{C}^n$ nad poljem $\mathbb{R}$ dimenzije $2k$.

Rješenje:

(a) Odredimo prvo neku bazu za M. Ako označimo s $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, 3$, imamo

$$\begin{aligned}
(z_1, z_2, z_3) \in M &\iff \overline{z_1} + iz_2 - z_3 = 0 \\
&\iff \begin{cases} x_1 - y_2 - x_3 = 0, \\ -y_1 + x_2 - y_3 = 0, \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_1 = y_2 + x_3 \\ x_2 = y_1 + y_3 \end{cases} \\
&\iff (z_1, z_2, z_3) = x_3(1, 0, 1) + y_1(i, 1, 0) + y_2(1, i, 0) + y_3(0, 1, i).
\end{aligned}$$

Lako se vidi da su gore navedeni vektori u M i linearno nezavisni (nad $\mathbb{R}$!), pa imamo

$$M = [\{(1, 0, 1), (i, 1, 0), (1, i, 0), (0, 1, i)\}].$$

Direktnom provjerom se sada vidi da je skup

$$\{(1, 0, 1), (i, 1, 0), (1, i, 0), (0, 1, i), (2i, i, -2)\}$$

linearno nezavisan, te da vrijedi

$$(1 + i, 0, 1 - i) = (1, 0, 1) + (i, 1, 0) - (0, 1, i),$$
$$(-2i, 1, 1 + i) = (1, i, 0) - (1, 0, 1) + (0, 1, i) - (2i, i, -2).$$

Stoga su baze za $M + N$ i $M \cap N$ dane s

$$B_{M+N} = \{(1, 0, 1), (i, 1, 0), (1, i, 0), (0, 1, i), (2i, i, -2)\},$$
$$B_{M\cap N} = \{(1 + i, 0, 1 - i), (0, i + 1, i - 1)\}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

ZADATAK 3

(a) (10 bodova) Za $n \geq 3$ izračunajte determinantu matrice reda n

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2n & n & n & \dots & n & n & n+1 \\ 2n & n & n & \dots & n & n+2 & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2n & n & n & \dots & n+3 & n+2 & n+1 \\ 2n & n & 2n-2 & \dots & n+3 & n+2 & n+1 \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \dots & n+3 & n+2 & n+1 \end{bmatrix}.$$

(b) (10 bodova) Koristeći elementarne transformacije nad retcima, odredite inverz matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje

a) Prvi redak množimo s $-n$ i dodajemo ostalima, zatim radimo Laplaceov razvoj po prvom stupcu.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Od determinante ostaje jedino sumand pridružen permutaciji $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ koja ima $I(p) = n-2+\ldots+2+1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ inverzija. Dakle

$$\det A = 2[(n-1)!](-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

ZADATAK 4

(a) (12 bodova) Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 10 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

(b) (10 bodova) Koristeći Cramerovu metodu, odredite za koji $\lambda \in \mathbb{R}$ sustav

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ima samo jedno rješenje, te vrijedi $x_2 = 3$.

Rješenje

(a)

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sada je skup rješenja

$$\{(4-2s-t, 3-s-t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{(4,3,0,0)+s(-2,-1,1,0)+t(-1,-1,0,1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Sustav ima jedinstveno rješenje ako je determinanta sustava različita od 0.

$$3 = x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4(\lambda - 1)} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

ZADATAK 5

Neka su $A, B \in M_n$, te neka je A regularna matrica.

(a) (10 bodova) Dokažite da retci matrice AB razapinju isti potprostor od M_{1n} kao i retci matrice B.

(b) (5 bodova) Vrijedi li analogna tvrdnja za stupce, to jest, razapinju li stupci matrice AB isti potprostor od M_{n1} kao stupci matrice B?

Rješenje (a) Neka je M potprostor od M_{1n} razapet retcima od AB, te L potprostor od M_{1n} razapet retcima od B. Retci matrice AB se mogu prikazati kao linearne kombinacije redaka od B, pa je $M \leq L$. Nadalje, kako je A regularna matrice, $r(AB) = r(B)$, pa je $\dim M = \dim L$. Kako je $M \leq L$, slijedi $M = L$, što je i trebalo dokazati.

(b) Ova tvrdnja ne vrijedi.

Na primjer, neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tada je $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, odakle je očito da stupci od AB ne razapinju isti potprostor od $M_{2,1}$ kao stupci od B.