LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 22. studenog 2024.

ZADATAK 1

(a) (5 bodova) Pronađite sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, takve da vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3(O)$ zadani s:

$$\vec{a} = \vec{i} + \lambda\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \mu\vec{k},$$

čine sustav izvodnica za $V^3(O)$.

(b) (5 bodova) Pronađite sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takve da je $[\{\vec{a}, \vec{c}\}] = [\{\vec{a} - \vec{c}, \vec{b}\}]$.

Rješenje:

(a) Tri vektora u vektorskom prostoru dimenzije tri čine sustav izvodnica ako i samo ako su linearno nezavisni, pa je dovoljno pronaći sve parametre $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takve da su dani vektori linearno nezavisni.

Neka je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

Slijedi:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & 2\beta+ & \gamma & = & 0 \\ \lambda\alpha & + & \beta+ & \gamma & = & 0 \\ 2\alpha & & 4\beta+ & \mu\gamma & = & 0, \end{array}$$

tj.

$$\begin{array}{cccccc} \alpha & + & 2\beta+ & \gamma & = & 0 \\ & & (1-2\lambda)\beta+ & (1-\lambda)\gamma & = & 0 \\ & & & (\mu-2)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\mu \neq 2$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$, pa je za te vrijednosti početni skup sustav izvodnica.

(b) Moramo provjeriti postoje li (fiksni) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da postoje rješenja sve četiri od sljedećih jednadžbi:

(i) $\vec{a} = \alpha(\vec{a} - \vec{c}) + \beta\vec{b}$

$$\begin{array}{ccccc} & & 2\beta = & 1 \\ (\lambda-1)\alpha & + & \beta = & \lambda \\ (2-\mu)\alpha & + & 4\beta = & 2, \end{array}$$

Dakle, rješenje postoji za $\mu = 2, \lambda \neq 1$ te za $\mu \neq 2, \lambda = \frac{1}{2}$

(ii) $\vec{c} = \alpha(\vec{a} - \vec{c}) + \beta\vec{b}$

$$\begin{aligned} 2\beta &= 1 \\ (\lambda-1)\alpha + \beta &= 1 \\ (2-\mu)\alpha + 4\beta &= \mu, \end{aligned}$$

Dakle, rješenje postoji za $\mu = 2, \lambda \neq 1$ te za $\mu \neq 2, \lambda = \frac{1}{2}$

(iii) $\vec{a} - \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{c}$

Vrijedi za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, uzmemo $\alpha = 1, \beta = -1$.

(iv) $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{c}$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2 \\ \lambda\alpha + \beta &= 1 \\ 2\alpha + \mu\beta &= 4, \end{aligned}$$

Dakle, rješenje postoji za $\mu = 2, \lambda \neq 1$ te za $\mu \neq 2, \lambda = \frac{1}{2}$

Dakle, dane linearne ljuske su jednake za parametre $\mu = 2, \lambda \neq 1$ te za $\mu \neq 2, \lambda = \frac{1}{2}$

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 22. studenog 2024.

ZADATAK 2

(10 bodova) Neka je V realan vektorski prostor te $\{a, b, c\}$ jedna njegova baza. Za svaki $n \in \mathbb{Z}$ dan je skup

$$S_n = \{a + b,\ a + (n + 3)b - (n + 2)c,\ 2a + 2b + nc\}.$$

(a) U ovisnosti o $n \in \mathbb{Z}$ odredite $\dim [S_n]$.

(b) Odredite jednu bazu (ako postoji) za potprostor

$$M = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} [S_n].$$

(c) Postoje li $m, n \in \mathbb{Z}$ međusobno različiti takvi da je $\dim([S_n] + [S_m]) < 3$?

Rješenje:

(a) Kako niti jedan od vektora nije 0, neovisno o n, te kako je nemoguće da istovremeno i drugi i treći vektor budu proporcionalni s prvim (jer ne može istovremeno biti $n = 0$ i $n + 2 = 0$), zapravo su nam jedine mogućnosti $\dim [S_n] = 2$ i $\dim [S_n] = 3$. Stoga ćemo provjeriti linearnu nezavisnost skupa S_n ovisno o n. Iz jednakosti

$$\alpha(a + b) + \beta(a + (n + 3)b - (n + 2)c) + \gamma(2a + 2b + nc) = 0,$$

izjednačavanjem koeficijenata uz elemente baze $\{a, b, c\}$ dobijemo sustav

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & \beta + & 2\gamma & = & 0 \\ \alpha & + & (n+3)\beta + & 2\gamma & = & 0 \\ & & -(n+2)\beta + & n\gamma & = & 0 \end{array}$$

odnosno

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & \beta + & 2\gamma & = & 0 \\ & & (n+2)\beta & & = & 0 \\ & & & n\gamma & = & 0 \end{array}$$

Slijedi da je S_n linearno nezavisan ako i samo ako je $n \neq 0, -2$. Stoga je

$$\dim [S_n] = \begin{cases} 2, & n \in \{0, -2\} \\ 3, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -2\}. \end{cases}$$

Možemo se i eksplicitno uvjeriti da je $\dim [S_0] = \dim [S_{-2}] = 2$ s obzirom da je

$$[S_0] = [\underbrace{\{a + b, a + 3b - 2c, 2a + 2b\}}_{S_0}] = [\{a + b, a + 3b - 2c\}],$$

$$[S_{-2}] = [\underbrace{\{a + b, a + b, 2a + 2b - 2c\}}_{S_{-2}}] = [\{a + b, a + b - c\}].$$

(b) S obzirom da za sve $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0, -2\}$ imamo $[S_n] = V$ (jer je $[S_n] \leq V$ i $\dim [S_n] = \dim V$), dobivamo da je

$$M = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} [S_n] = [S_0] \cap [S_{-2}].$$

Kako je očito $a + b \in [S_0] \bigcap [S_{-2}]$, zaključujemo da je $\dim M \geq 1$. S druge strane, lako se vidi da $a + b - c \notin [S_0]$, pa zaključujemo da je $\dim M < 2$, te je onda

$$M = [\{a + b\}].$$

(c) Kako je za $[S_n] = V$ za sve $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -2\}$, očito je $[S_n] + [S_m] = V$ za sve $m \in \mathbb{Z}$. Stoga je jedino preostalo provjeriti je li $\dim ([S_0] + [S_{-2}]) < 3$. Međutim, iz (b) dijela imamo dimenziju presjeka, pa je

$$\dim ([S_0] + [S_{-2}]) = \dim [S_0] + \dim [S_{-2}] - \dim [S_0] \cap [S_{-2}] = 2 + 2 - 1 = 3,$$

pa zaključujemo da takvi m, n ne postoje.

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 22. studenog 2024.

ZADATAK 3

(10 bodova) Potprostori $M, N \leq \mathbb{R}^{4n+3}$ zadani su s

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_{4n+3}) \in \mathbb{R}^{4n+3} : \ x_i = x_{4n+4-i}, \quad i = 1, 2, \dots 2n+1\},$$

$$N = \{(x_1, x_2, \dots x_{4n+3}) : \ x_{2i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots 2n+1\}.$$

(a) Odredite dimenziju potprostora M i N te po jednu bazu za M i N.

(b) Odredite dimenziju potprostora $M \cap N$ te jednu bazu tog potprostora

(c) Postoji li broj $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $M + N = \mathbb{R}^{4n+3}$?

Rješenje:

(a) Neka je $x \in M$ proizvoljan vektor. Tada je

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3 \dots, x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+1}, x_{2n}, \dots, x_3, x_2, x_1) \\ &= x_1(e_1 + e_{4n+3}) + x_2(e_2 + e_{4n+2}) + \dots x_{2n+1}(e_{2n+1} + e_{2n+3}) + x_{2n+2}e_{2n+2}. \end{aligned}$$

Dakle, skup

$$\{e_1 + e_{4n+3}, e_2 + e_{4n+2}, \dots, e_{2n+1} + e_{2n+3}, e_{2n+2}\}$$

je sustav izvodnica za M.

Lako se vidi da je taj skup linearno nezavisan, pa je i baza za M.

Slijedi da je $\dim M = 2n + 2$.

Neka je sada $y \in N$ proizvoljan vektor. Tada je

$$\begin{aligned} y &= (y_1, 0, y_3, 0, \dots, y_{4n+1}, 0, y_{4n+3}) \\ &= y_1e_1 + y_3e_3 + \dots y_{4n+1}e_{4n+1} + y_{4n+3}e_{4n+3}. \end{aligned}$$

Dakle, skup

$$\{e_1, e_3, \dots e_{4n+1}, e_{4n+3}\}$$

je sustav izvodnica za N, a vidimo da je i linearno nezavisan, pa je to baza potprostora N.

Dakle, $\dim N = 2n + 2$.

(b) Neka je opet vektor $x = (x_1, x_2, x_3 \dots, x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+1}, x_{2n}, \dots, x_3, x_2, x_1) \in M$ proizvoljan.

Neka je sada također $x \in N$, tj.

$$\begin{aligned} x &= (x_1, 0, x_3, 0, \dots, x_{2n-1}, 0, x_{2n+1}, 0, x_{2n+1}, 0, \dots, x_3, 0, x_1) \\ &= x_1(e_1 + e_{4n+3}) + x_3(e_3 + e_{4n+1}), \dots, x_{2n-1}(e_{2n-1} + e_{2n+5}) + x_{2n+1}(e_{2n+1} + e_{2n+3}). \end{aligned}$$

Slijedi da je skup

$$\{e_1 + e_{4n+3}, e_3 + e_{4n+1}, \ldots, e_{2n-1} + e_{2n+5}, e_{2n+1} + e_{2n+3}\}$$

skup izvodnica za $M \cap N$, a opet vidimo da je i linearno nezavisan, pa je to baza potprostora $M \cap N$.

Dakle, $\dim M \cap N = n + 1$

(c) Budući da je $M + N \leq \mathbb{R}^{4n+3}$, dovoljno je da je $\dim(M + N) = 4n + 3$ da bi vrijedilo $M + N = \mathbb{R}^{4n+3}$.

Računamo:

$$\begin{aligned}
\dim(M + N) &= \dim M + \dim N - \dim(M \cap N) \\
&= (2n + 2) + (2n + 2) - (n + 1) \\
&= 3n + 3.
\end{aligned}$$

Dakle, jedina mogućnost je $n = 0$.

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 22. studenog 2024.

ZADATAK 4

(10 bodova) U vektorskom prostoru $M_2(\mathbb{C})_\mathbb{R}$ kompleksnih matrica nad poljem realnih brojeva dan je potprostor

$$M = \{A \in M_2(\mathbb{C})_\mathbb{R} : a_{ij} = \overline{a}_{ji}, i, j = 1, 2\}.$$

(a) Odredite jedan direktni komplement od M u $M_2(\mathbb{C})_\mathbb{R}$.

(b) Neka je N dobiveni direktni komplement, odredite rastav proizvoljne matrice $A \in M_2(\mathbb{C})_\mathbb{R}$ s obzirom na rastav $M_2(\mathbb{C})_\mathbb{R} = M \dot{+} N$.

Rješenje:

a Odredimo prvo jednu bazu za M. Neka je $A \in A \in M_2(\mathbb{C})_\mathbb{R}$ proizvoljna. Iz uvjeta $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ zaključujemo da A ima sljedeći oblik

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 + iy_2 \\ x_2 - iy_2 & x_3 \end{bmatrix}, x_1, x_2, y_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Dakle, A možemo zapisati kao

$$A = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je skup

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

sustav izvodnica i očito je linearno nezavisan, pa je jedna baza za M. Sada nam je potrebna jedna dopuna do baze za cijeli $M_2(\mathbb{C})_\mathbb{R}$. Jedna dobra dopuna dana je s

$$\left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

pa zaključujemo da je jedan direktni komplement od M u $\mathcal{P}_4$ dan s

$$N = \left[\left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

(b) Za traženi rastav potrebno je odrediti zapis matrice $A = \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 & x_2 + iy_2 \\ x_3 + iy_3 & x_4 + iy_4 \end{bmatrix}$ u bazi $\{E_{11}, E_{12} + E_{21}, iE_{12} - iE_{21}, E_{22}, iE_{11}, iE_{22}, E_{21}, iE_{12}\}$ što se svodi na rješavanje sustava

$$\begin{aligned} x_1 + iy_1 &= \alpha_1 + i\beta_1 \\ x_2 + iy_2 &= \alpha_2 + i\alpha_3 + \beta_3 \\ x_3 + iy_3 &= \alpha_2 - i\alpha_3 + i\beta_4 \\ x_4 + iy_4 &= \alpha_4 + i\beta_2. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_3, \alpha_3 = y_2, \alpha_4 = x_4, \beta_1 = y_1, \beta_2 = y_4, \beta_3 = x_2 - x_3, \beta_4 = y_3 - y_2$. Dakle, zapis od $A = A_M + A_N$ s obzirom na rastav $M \dot{+} N$ dan s

$$\begin{aligned} A = & \underbrace{(x_1 E_{11} + x_3(E_{12} + E_{21}) + y_2(iE_{12} - iE_{21}) + x_4 E_{22}}_{=A_M} \\ & + \underbrace{(y_1(iE_{11}) + y_4(iE_{22}) + (x_2 - x_3)E_{21} + (y_3 - y_2)(iE_{12})}_{=A_N}. \end{aligned}$$

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 22. studenog 2024.

ZADATAK 5

a) (5 bodova) Neka je V vektorski prostor, te neka su a, b, c i w vektori iz V takvi da vrijedi

$$w = a + b + c.$$

Ako je to jedini način na koji se w može prikazati kao linearna kombinacija vektora a, b i c, je li onda skup $\{a, b, c\}$ linearno nezavisan? Obrazložite.

b) (5 bodova) Neka je V vektorski prostor dimenzije $2n$, gdje je $n \geq 1$, te neka su M i L potprostori od V dimenzije n za koje vrijedi $M \cap L = \{0\}$. Pretpostavimo da je $B_M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ baza za M, te $B_L = \{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za L. Koristeći linearne kombinacije elemenata skupova B_M i B_L, zapišite neki skup B_K, takav da je B_K baza za potprostor od V koji je direktan komplement i od M i od L. Obrazložite.

Rješenje:

a) Ako skup $\{a, b, c\}$ nije linearno nezavisan, tada po definiciji postoje skalari α, β, γ, ne svi 0 takvi da je

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0.$$

Sada je u prikazu

$$w = w + 0 = (1 + \alpha)a + (1 + \beta)b + (1 + \gamma)c$$

jedan od koeficijenata na desnoj strani različit od 1, pa ne vrijedi jedinstvenost prikaza w kao linearne kombinacije vektora a, b i c, što je kontradikcija.

b) Tvrdimo da je $B_K = \{a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n\}$ baza jednog potprostora koji je direktan komplement i za M i za L. Pokažimo prvo da je B_K linearno nezavisan.

$$\text{Ako je } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a_i + b_i) = 0, \text{ tada je } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) b_i \in M \cap L = \{0\}.$$

Dakle $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$ i $\sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) b_i = 0$. Slijedi $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Linearna nezavisnost skupa B_K je pokazana.

Označimo $K = [B_K]$. Dakle B_K je baza za K i $\dim K = n$. Pokažimo sada $K \cap M = \{0\}$. Neka je $x \in K \cap M$. Postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ te $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ takvi da vrijedi

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i a_i$$

Imamo

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha'_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) b_i \in M \cap L = \{0\}$$

Slijedi $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \alpha'_1, \ldots = \alpha'_n = 0$, pa je $x = 0$. Dakle $K \cap M = \{0\}$. Sada je $\dim(K + M) = \dim(K) + \dim(L) = n + n = 2n = \dim(V)$. Slijedi $V = K \dotplus M$. Slično se pokaže $V = K \dotplus L$.