Linearna algebra 1
vježbe

Sadržaj

Poglavlje 1

Prostor radijvektora i sustavi linearnih jednadžbi

1.1 Sustavi 2×2

Općeniti 2×2 sustav izgleda kao

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

gdje su $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$.
Analitičko-geometrijska interpretacija: rješenje sustava je skup svih točaka koje se nalaze u presjeku pravaca $a_1x + b_1y = c_1$ i $a_2x + b_2y = c_2$. Međusobni položaji dva pravca u ravnini su

(a) pravci se sijeku u jednoj točki $\Leftrightarrow$ postoji jedinstveno rješenje sustava.

(b) pravci su paralelni (ne sijeku se) $\Leftrightarrow$ sustav nema rješenja.

(c) pravci se podudaraju $\Leftrightarrow$ sustava ima beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 1.1. 1)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Rješenje: $x = y = 1$

2)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

Nema rješenja.

3)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = -2 \end{cases}$$

Ima beskonačno mnogo rješenja.

1.2 Sustavi 3×3

Nema se puno više za reći o sustavima 2×2 pa prelazimo na 3×3 sustave. To su sustavi oblika

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdje su $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.
Analitičko-geometrijska interpretacija: Svaku jednadžbu možemo shvatiti kao jednadžbu ravnine u prostoru. Za slike mogućih položaja tri ravnine u prostoru vidjeti npr. ovaj link.
Mogući slučajevi:

(a) ravnine se ne sijeku $\Leftrightarrow$ sustav nema rješenja.

(b) ravnine se sijeku u jednoj točki $\Leftrightarrow$ postoji jedinstveno rješenje sustava.

(c) ravnine se sijeku u pravcu $\Leftrightarrow$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja, regulirano jednim parametrom.

(d) ravnine se podudaraju $\Leftrightarrow$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja, regulirano s dva parametra.

Propozicija 1.2. *Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Tada sustavi linearnih jednadžbi (1.2) i*

$$\begin{aligned} \alpha(a_1x + b_1y + c_1z) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z) &= \alpha d_1 + \beta d_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

imaju isti skup rješenja. Isti rezultat vrijedi ako zamijenimo poredak jednadžbi u sustavu.

Prethodna propozicija nam daje strategiju rješavanja sustava linearnih jednadžbi.

1. Zamjenom redoslijeda jednadžbi sustava zapisat ćemo sustav (1.2) kao sustav

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1x + \tilde{b}_1y + \tilde{c}_1z &= \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2x + \tilde{b}_2y + \tilde{c}_2z &= \tilde{d}_2, \\ \tilde{a}_3x + \tilde{b}_3y + \tilde{c}_3z &= \tilde{d}_3 \end{aligned} \tag{1.4}$$

   pri čemu je $\tilde{a}_1 \neq 0$.

2. Uzastopnom primjenom propozicije konstruiramo sustav

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1x + \tilde{b}_1y + \quad \tilde{c}_1z &= \tilde{d}_1 \\ \tilde{\tilde{b}}_2y + \quad \tilde{\tilde{c}}_2z &= \tilde{\tilde{d}}_2 \\ \tilde{\tilde{b}}_3y + \quad \tilde{\tilde{c}}_3z &= \tilde{\tilde{d}}_3 \end{aligned} \tag{1.5}$$

   koji ima isti skup rješenja kao i polazni sustav (1.2).

3. Ponavljamo korake 1. i 2. s elementima $\tilde{\tilde{b}}_2$ i $\tilde{\tilde{b}}_3$ da bismo konačno dobili sustav

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 x + \tilde{b}_1 y + \quad \tilde{c}_1 z &= \tilde{d}_1 \\ \tilde{\tilde{b}}_2 y + \quad \tilde{\tilde{c}}_2 z &= \tilde{\tilde{d}}_2 \\ \tilde{\tilde{\tilde{c}}}_3 z &= \tilde{\tilde{\tilde{d}}}_3 \end{aligned} \tag{1.6}$$

koji ima isti skup rješenja kao i polazni sustav (1.2).

Za sustav linearnih jednadžbi (1.6) kažemo da ima **trokutastu formu** i njegovo rješenje je moguće direktno očitati uvrštavanjem treće jednadžbe u drugu i onda rješenje druge u prvu. Takav postupak se zove **povratna supstitucija**. Svođenje na trokutastu formu daje siguran put k rješenju i u slučajevima kada sustav nema jedinstveno rješenje. Naglasimo da je jednadžba rješena samo onda kada smo odredili cijeli skup rješenja!

PRIMJER 1.3.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Rješenje: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

NAPOMENA 1.4. Rješenja sustava se mogu provjeriti na `www.wolframalpha.com`

ZADATAK 1.1. a)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{cases}$$

(nema rješenja)

b)

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 3 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = 3 \end{cases}$$

Rješenje: $x_1 = t$, $x_2 = 4t - 9$, $x_3 = \frac{9}{2}t - \frac{21}{2}$, $t \in \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Rješenje: $x_1 = -t + s$, $x_2 = t$, $x_3 = s$, $s, t \in \mathbb{R}$.

ZADATAK 1.2. Odredite $h, k \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned}$$

ima

1. jedinstveno rješenje,

2. beskonačno mnogo rješenja,

3. nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.
Rješenje Rješavamo sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \quad \big/ \cdot (-4) + II \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ (h-8)y &= 5 - 4k \end{aligned}$$

Ako je $h = 8$, onda za $5 - 4k = 0$, tj. $k = \frac{5}{4}$, sustav ima beskonačno mnogo rješenja oblika $x + 2y = \frac{5}{4}$ odakle slijedi da je $x = \frac{5}{4} - 2t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$.
Za $h = 8$ i $5 - 4k \neq 0$ sustav nema rješenja.
Za $h \neq 8$ sustav ima jedinstveno rješenje dano sa

$$y = \frac{5-4k}{h-8}, \quad x = k - 2\frac{5-4k}{h-8}.$$

Zadatak 1.3. Odredite $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} 2\beta x + \quad \beta y + \quad \beta z &= 1 + \gamma \\ 2x + \quad y + \quad \beta z &= 1 \\ 4x + \quad (2-\beta)y + \quad (\beta^2 + 2\beta)z &= 2 + \gamma \end{aligned}$$

ima

1. jedinstveno rješenje,

2. beskonačno mnogo rješenja,

3. nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.
Rješenje

$$\begin{aligned} 2\beta x + \quad \beta y + \quad \beta z &= 1 + \gamma \\ 2x + \quad y + \quad \beta z &= 1 \\ 4x + \quad (2-\beta)y + \quad (\beta^2 + 2\beta)z &= 2 + \gamma \end{aligned}$$

Zamjena prve i druge jednadžbe.

$$\begin{aligned} 2x + \quad y + \quad \beta z &= 1 \\ 2\beta x + \quad \beta y + \quad \beta z &= 1 + \gamma \\ 4x + \quad (2-\beta)y + \quad (\beta^2 + 2\beta)z &= 2 + \gamma \end{aligned}$$

Množimo prvu jednadžbu s $-\beta$ i dodajemo drugoj. Zatim množimo prvu jednadžbu s -2 i dodajemo trećoj.

$$\begin{aligned} 2x + \quad y + \quad \beta z &= 1 \\ (\beta - \beta^2)z &= 1 + \gamma - \beta \\ -\beta y + \quad \beta^2 z &= \gamma \end{aligned}$$

Zamjena druge i treće jednadžbe.

$$\begin{aligned} 2x+ \quad y+ \quad \beta z &= 1 \\ -\beta y+ \quad \beta^2 z &= \gamma \\ (\beta - \beta^2)z &= 1 + \gamma - \beta \end{aligned}$$

Sveli smo sustav na gornjetrokutasti. Sada gledamo slučajeve.

1) $\beta \neq 0, 1$. Tada možemo zadnju jednadžbu podijeliti s $\beta - \beta^2$ pa je

$$z = \frac{1 + \gamma - \beta}{\beta - \beta^2}$$

odakle povratnom supstitucijom slijedi i da je

$$y = \frac{1 + \gamma - \beta}{1 - \beta} - \frac{\gamma}{\beta}, \quad x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 + \gamma - \beta}{1 - \beta} + \frac{\gamma}{\beta} - \frac{1 + \gamma - \beta}{1 - \beta}\right).$$

2) a) $\beta = 0$. Tada zbog treće jednadžbe mora vrijediti $0 = 1 + \gamma$. Dakle, ako je $\gamma \neq -1$, nema rješenja. Ako je $\gamma = -1$, onda treća jednadžba glasi $0 = 0$. No, druga jednadžba je $0 = -1$ pa ni u ovom slučaju nema rješenja.

b) $\beta = 1$. Tada mora biti $0 = \gamma$ pa ako je $\gamma \neq 0$, nema rješenja. Ako je $\gamma = 0$, onda dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2x+ \quad y+ \quad z &= 1 \\ -y+ \quad z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

koji ima beskonačno mnogo rješenja

$$x = \frac{1}{2} - t, \quad y = t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, za $\beta \notin \{0, 1\}$ sustav ima jedinstveno rješenje. Za $\beta = 0$ ili $\beta = 1$, $\gamma \neq 0$ sustav nema rješenja. Za $\beta = 1$, $\gamma = 0$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja. $\square$

1.3 Radijvektori u ravnini

Osnovni pregled teorije radijvektora (za više detalja vidjeti skripte predavanja).
Dana je ravnina E^2 koju shvaćamo kao skup točaka, u E^2 je dan pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki O. Svakoj točki $A \in E^2$ pridružujemo **radijvektor** $\overrightarrow{OA}$, tj. strelicu s početkom u O i završetkom u točki A.
Skup svih radijvektora u ravnini označavamo s $V^2(O)$. Radijvektor $\overrightarrow{OO}$ zovemo **nulvektor** i označavamo s $\vec{0}$. **Modul** od $\overrightarrow{OA}$ označavamo s $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ i definiramo kao duljinu dužine $\overline{OA}$. Radijvektor $\vec{0}$ je jedini vektor čiji modul je 0. **Smjer** od $\overrightarrow{OA}$ definira se kao pravac OA (smjer nulvektora se ne definira). Kažemo da su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ **kolinearni** ako O, A i B leže na istom pravcu. Nulvektor je kolinearan sa svakim radijvektorom.
Neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ kolinearni i različiti od nulvektora. Kažemo da su **jednako orijentirani** ako A i B leže s iste strane točke O na pravcu OAB. Inače kažemo da su **suprotno orijentirani**. Orijentacija je relativan pojam, nijedan radijvektor sam za sebe nema orijentaciju.
Svaki netrivijalni radijvektor je jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom. Za radijvektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ definiramo **suprotan radijvektor** $-\vec{a}$ kao radijvektor koji ima jednak modul i smjer kao $\vec{a}$, ali suprotnu orijentaciju. Dodatno, za nulvektor definiramo $-\vec{0} = \vec{0}$.
Zbrajanje radijvektora. Neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nekolinearni. Tada $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ definiramo kao radijvektor $\overrightarrow{OC}$, pri čemu je C jedinstvena točka ravnine sa svojstvom da je četverokut $OACB$ paralelogram.
Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, onda ćemo $\vec{a}+\vec{b}$ definirati na sljedeći način:

$$\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in V^2(O), \tag{1.7}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a}) = -\vec{a}+\vec{a} = \vec{0}, \quad \forall \vec{a} \neq \vec{0}. \tag{1.8}$$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, netrivijalni i nisu jedan drugome suprotni, zbroj $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo kao radijvektor koji ima isti smjer kao $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednako orijentirani, $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo tako da ima modul $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ i orijentaciju istu kao $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotne orijentacije te ako je $|\vec{a}| > |\vec{b}|$, onda $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo kao radijvektor čiji modul iznosi $|\vec{a}|-|\vec{b}|$, kolinearan je s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, i ima istu orijentaciju kao $\vec{a}$. Ako je $|\vec{a}| < |\vec{b}|$, definicija je analogna, samo je orijentacija zbroja ista kao $\vec{b}$.
Svakoj točki $A \in E^2$ možemo pridružiti par koordinata u odabranom pravokutnom koordinatnom sustavu.

Propozicija 1.5. $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2) \Longrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, *gdje je* $C = (x_1+x_2, y_1+y_2)$.

Propozicija 1.6. *Zbrajanje radijvektora ima sljedeća svojstva:*

(a) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$ $\vec{a}+\vec{b} \in V^2(O)$.

(b) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

(c) vrijedi $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a} \in V^2(O)$.

(d) za svaki $\vec{a} \in V^2(O)$ *vrijedi* $\vec{a}+(-\vec{a}) = -\vec{a}+\vec{a} = \vec{0}$.

(e) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$.

Definiramo još jednu operaciju nad radijvektorima koju zovemo **množenje radijvektora skalarom**.
Definicija 1.7. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\vec{v} \in V^2(O)$. Radijvektor $\alpha\vec{v}$ definiramo kao radijvektor čiji je

- modul $|\alpha\vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$,
- smjer isti kao i smjer od $\vec{v}$,
- $\vec{v}$ i $\alpha\vec{v}$ su iste (suprotne) orijentacije ako je $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$).

Ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{v} = \vec{0}$, tada je $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ pa u tom slučaju ne govorimo o smjeru i orijentaciji.
Vrijedi da je

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in V^2(O), \tag{1.9}$$
$$(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in V^2(O). \tag{1.10}$$

Propozicija 1.8. *$\alpha \in \mathbb{R}$, $T = (x, y) \implies \alpha \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT'}$, gdje je $T' = (\alpha x, \alpha y)$.*

Propozicija 1.9. *Neka je $\vec{a} \in V^2(O)$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Za svaki $\vec{b} \in V^2(O)$ kolinearan s $\vec{a}$ postoji jedinstveni $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.*

Vrijedi i obrat (direktno iz definicija): svaki vektor $\vec{b}$ oblika $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, je kolinearan s $\vec{a}$.

Napomena 1.10. Vrijedi i sljedeće: vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoji netrivijalan izbor koeficijenata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Za ovo posljednje kažemo još da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ **linearno zavisni**.
Ili: vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako je jednakost $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ ispunjena samo na trivijalan način, tj. za $\alpha = \beta = 0$. Za ovo kažemo da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ **linearno nezavisni**.
Ili: vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako ($\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \implies \alpha = \beta = 0$).

Propozicija 1.11. *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$ nekolinearni vektori. Za svaki $\vec{c} \in V^2(O)$ postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.*

Drugim riječima: svaki vektor $\vec{c} \in V^2(O)$ moguće je na jedinstven način prikazati kao linearnu kombinaciju nekolinearnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kažemo da je $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ **baza** za $V^2(O)$.
Bilo koja dva nekolinearna vektora čine bazu za $V^2(O)$.

Zadatak 1.4. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, pri čemu je $A = (1, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -3)$. Pokažite da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ nisu kolinearni te prikažite $\vec{c}$ kao njihovu linearnu kombinaciju.

Rješenje Zadatak ćemo riješiti na nekoliko načina:

1) računamo koeficijente smjera pravaca OA i OB:

$$k_{OA} = \frac{2-0}{1-0} = 2, \quad k_{OB} = \frac{4-0}{1-0} = 4.$$

   Kako koeficijenti smjera nisu jednaki, slijedi da $\vec{a}$, $\vec{b}$ nisu kolinearni.

2) pokušajmo vektor $\vec{b}$ zapisati kao $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Prema propoziciji 1.8 slijedi da je $(1, 4) = (\lambda, 2\lambda)$. Dobivamo sustav jednadžbi

$$\lambda = 1$$
$$2\lambda = 4$$

   koji nema rješenja. Dakle, ne postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

3) Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ su kolinearni akko postoji netrivijalan izbor koeficijenata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Slijedi da je $(\alpha + \beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0)$. Dobivamo 2x2 sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + 4\beta &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = 0$. Dakle, $\vec{a}, \vec{b}$ su nekolinearni.

Izrazimo sada vektor $\vec{c}$ kao njihovu linearnu kombinaciju. Propozicija 1.11 nam garantira da postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Izjednačavanjem krajnjih točaka dobivamo

$$(\alpha + \beta, 2\alpha + 4\beta) = (-1, -3)$$

što daje sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -1 \\ 2\alpha + 4\beta &= -3 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Dakle, $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Označimo s $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $I = (1, 0)$, i $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $J = (0, 1)$. Tada je očito za svaki $T = (x, y) \in E^2$

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j}. \tag{1.11}$$

Nekolinearne vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ nazivamo **standardnom ili kanonskom bazom** za $V^2(O)$.

DZ 1.1. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, pri čemu je $A = (1, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -3)$, $D = (0, 1)$. Pokažite radijvektor $\vec{d}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

DZ 1.2. Isti vektori kao u prethodnom zadatku, samo se ovdje traži da se prikaže vektor $\vec{d}$ kao $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, pri čemu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Zadatak 1.5. Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni (linearno nezavisni) vektori u $V^2(O)$. Odredite za koje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vektori

$$\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \beta\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

također nekolinearni (linearno nezavisni).

Rješenje Pogledajmo linearnu kombinaciju

$$A(\vec{a} + \beta\vec{b}) + B(\beta\vec{a} + \alpha\vec{b}) = \vec{0}.$$

Želimo da je jednakost zadovoljena samo za $A = B = 0$. Prethodni izraz možemo zapisati u obliku

$$(A + \beta B)\vec{a} + (\beta A + \alpha B)\vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni vektori po pretpostavci, tada mora biti

$$\begin{aligned} A + \beta B &= 0 \\ \beta A + \alpha B &= 0 \end{aligned}$$

Ovo shvatimo kao sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama A, B. To je **homogeni sustav** jer su slobodni članovi na desnoj strani jednaki nuli. Homogeni sustav uvijek ima rješenje $A = B = 0$, i to rješenje zovemo trivijalnim. No, u ovom zadatku mi želimo pokazati da mu je to jedino rješenje. Pomnožimo li prvu jednadžbu s $-\beta$ i dodamo drugoj, dobivamo

$$\begin{aligned} A + \beta B &= 0 \\ (\alpha - \beta^2)B &= 0 \end{aligned}$$

Vrijedi da je $B = 0$ jedino rješenje ako i samo ako je $\alpha - \beta^2 \neq 0$. Ako je $B = 0$, onda uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo da je i $A = 0$, tj. traženu jedinstvenost rješenja.
Dakle, navedeni vektori su linearno nezavisni ako i samo ako je $\alpha - \beta^2 \neq 0$.

1.4 Radijvektori u prostoru

Definicije su analogne onima za radijvektore u ravnini pa uglavnom izostavljamo detalje.
E^3 je trodimenzionalni prostor sa točkovnom strukturom. U njemu zadajemo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u O i skup svih radijvektora u prostoru označavamo s $V^3(O)$. Sljedeće su definicije iste kao i za $V^2(O)$:

- modul
- smjer
- orijentacija
- suprotni vektor
- zbrajanje vektora
- množenje vektora skalarom

Prve tri točke jedinstveno određuju vektor iz $V^3(O)$. Nadalje, zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom imaju ista svojstva kao i u $V^2(O)$.
Označimo s $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $I = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $J = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, $K = (0, 0, 1)$. Tada je očito za svaki $T = (x, y, z) \in E^3$

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.12}$$

Vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ nazivamo **standardnom ili kanonskom bazom** za $V^3(O)$.
Ovdje imamo jedan novi pojam koji nismo imali u $V^2(O)$.

Definicija 1.12. Neka je $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, $n \geq 2$, konačan skup radijvektora u $V^3(O)$, $\vec{v}_i = \overrightarrow{OT_i}$, $i = 1, \dots, n$. Kažemo da su vektori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ **komplanarni** ako postoji ravnina kroz ishodište koja sadrži sve završne točke T_i, $i = 1, \dots, n$. U protivnom kažemo da su ti vektori **nekomplanarni**.

Dva su vektora uvijek komplanarna. (Ako su nekolinearni, onda postoji *jedinstvena* ravnina kroz točke O, T_1, T_2).
Tri vektora mogu i ne moraju biti komplanarni. Na primjer, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nisu komplanarni, dok $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}+\vec{j}\}$ jesu. Skicirajte.

Propozicija 1.13. *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3(O)$ proizvoljni nekolinearni vektori. Za svaki vektor $\vec{v} \in V^3(O)$* komplanaran *s $\vec{a}, \vec{b}$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi*

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Propozicija 1.14. *Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3(O)$ proizvoljni nekomplanarni vektori. Za svaki radijvektor $\vec{v} \in V^3(O)$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi*

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Napomena 1.15. U $V^3(O)$ tri nekomplanarna vektora čine bazu (u smislu da se svaki radijvektor može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija tih vektora).

Napomena 1.16. Tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su nekomplanarni (dakle, čine bazu) ako i samo ako vrijedi

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

ZADATAK 1.6. Provjerite čine li vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, gdje je

a) $A = (1, 0, -1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 1, 1)$,

b) $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (0, 1, 1)$,

c) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$

bazu za $V^3(O)$.

RJEŠENJE Svugdje krećemo od jednakosti

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$$

a) Po svojstvima zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom za završne točke dobivamo da vrijedi

$$(\alpha + \beta, 2\beta + \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma) = (0, 0, 0).$$

Uređene trojke su jednake ako i samo ako je

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & & = 0 \\ & & 2\beta+ & \gamma & = 0 \\ -\alpha & + & 3\beta+ & \gamma & = 0 \end{array}$$

Rješavamo sustav elementarnim transformacijama. Dodajemo najprije prvu jednadžbu trećoj.

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & & = 0 \\ & & 2\beta+ & \gamma & = 0 \\ & & 4\beta+ & \gamma & = 0 \end{array}$$

Zatim množimo drugu jednadžbu s -2 i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & & = 0 \\ & & 2\beta+ & \gamma & = 0 \\ & & & -\gamma & = 0 \end{array}$$

Povratnom supstitucijom dobivamo jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dakle, dani vektori čine bazu.

b)

$$(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma) = (0, 0, 0),$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & & = 0 \\ \alpha & + & 2\beta+ & \gamma & = 0 \\ \alpha & + & 2\beta+ & \gamma & = 0 \end{array}$$

Ovdje imamo dvije jednake jednadžbe pa se sustav reducira na sustav od 2 jednadžbe s 3 nepoznanice koji ne može imati jedinstveno rješenje.

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & & = 0 \\ \alpha & + & 2\beta+ & \gamma & = 0 \end{array}$$

Rješenje ovog sustava je $\alpha = t$, $\beta = -t$, $\gamma = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Na primjer za $t = 1$ dobivamo $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ pa je $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, tj. $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ pa vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne čine bazu za $V^3(O)$ (komplanarni su).

c)

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$$

što povlači da je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ pa navedeni vektori čine bazu. To su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$! □

Zadatak 1.7. Prikažite vektor $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $D = (1, -1, -4)$ kao linearnu kombinaciju vektora iz prethodnog zadatka.

Rješenje

a) $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ vodi na jednakost završnih točaka

$$(\alpha + \beta, 2\beta + \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma) = (1, -1, -4)$$

što je ekvivalentno sustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ -\alpha & + & 3\beta + & & \gamma & = & -4 \end{array}$$

Zbrojimo prvu i treću jednadžbu

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ & & 4\beta + & & \gamma & = & -3 \end{array}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu s -2 i dodamo trećoj

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ & & & & -\gamma & = & -1 \end{array}$$

Povratnom supstitucijom dobivamo jedinstveno rješenje $\gamma = 1$, $\beta = -1$, $\alpha = 2$. Dakle,

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

b)

$$(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma) = (1, -1, -4),$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = & -4 \end{array}$$

Izjednačavanjem dvije zadnje jednadžbe dobivamo $-1 = -4$ što je kontradikcija. Dakle, sustav nema rješenja.

Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne čine bazu za $V^3(O)$, nego razapinju jednu ravninu kroz ishodište. Vektor $\vec{d}$ nije komplanaran s tom ravninom.

Ako uzmemo $\vec{d} = (1, -1, -1)$, tada bismo $\vec{d}$ mogli prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ali ne na jedinstven način

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \end{array}$$

Rješenja ovog sustava su $\alpha = t$, $\beta = 1 - t$, $\gamma = -3 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Jedno rješenje je, na primjer, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$.

c)

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -4)$$

što ima jedinstveno rješenje $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$.

Zadatak 1.8. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni vektori u $V^3(O)$. Odredite za koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vektori

$$\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{b} + \beta\vec{c}, \vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{c}$$

također nekomplanarni.

Rješenje Pogledajmo linearnu kombinaciju

$$A\left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right) + B\left(\vec{b} + \beta\vec{c}\right) + C\left(\vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{c}\right) = \vec{0}.$$

Želimo dobiti $A = B = C = 0$. Napišimo prethodni izraz u obliku

$$(A + C)\vec{a} + (A\alpha + B + C\beta)\vec{b} + (B\beta + \alpha C)\vec{c} = \vec{0}.$$

Kako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, vrijedi

$$\begin{array}{ccccc} A & + & & C & = & 0 \\ \alpha A & + & B+ & \beta C & = & 0 \\ & & \beta B+ & \alpha C & = & 0 \end{array}$$

Prethodne jednadžbe shvatimo kao sustav za A, B, C. Želimo da taj sustav ima jedinstveno rješenje dano s $A = B = C = 0$. Rješavamo sustav. Pomnožimo prvu jednadžbu s $-\alpha$ i dodajmo drugoj.

$$\begin{array}{ccccc} A & + & & C & = & 0 \\ & & B+ & (\beta - \alpha)C & = & 0 \\ & & \beta B+ & \alpha C & = & 0 \end{array}$$

Sada pomnožimo drugu jednadžbu s $-\beta$ i dodajmo trećoj.

$$\begin{array}{ccccc} A & + & & C & = & 0 \\ & & B+ & (\beta - \alpha)C & = & 0 \\ & & & \left(\alpha - \beta^2 + \alpha\beta\right)C & = & 0 \end{array}$$

Vidimo da je $A = B = C = 0$ jedino rješenje ako i samo ako je $\alpha - \beta^2 + \alpha\beta \neq 0$.

Zadatak 1.9. (a) Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$ i $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ komplanarni?

(b) Postoji li vektor $\vec{d} \in V^3(O)$ (koji ne ovisi o λ) takav da vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ nisu komplanarni niti za jedan $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rješenje

(a) Želimo da $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ ima netrivijalna rješenja. Uvrstimo vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\alpha\left(\vec{i} + \lambda\vec{k}\right) + \beta\left(2\vec{i} + \lambda\vec{j}\right) + \gamma\left(-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) = \vec{0},$$

$$(\alpha + 2\beta - \gamma)\vec{i} + (\lambda\beta - 2\gamma)\vec{j} + (\lambda\alpha + \gamma)\vec{k} = \vec{0}.$$

Kako su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ linearno nezavisni (nekomplanarni), slijedi da je

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta- & & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta- & & 2\gamma & = & 0 \\ \lambda\alpha & & & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Množimo prvu jednadžbu s $-\lambda$ i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta- & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta- & 2\gamma & = & 0 \\ & & -2\lambda\beta+ & (\lambda+1)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Množimo drugu jednadžbu s 2 i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta- & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta- & 2\gamma & = & 0 \\ & & & (\lambda-3)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Gledamo slučajeve

1) $\boxed{\lambda = 3}$ Imamo sustav

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta- & \gamma & = & 0 \\ & & 3\beta- & 2\gamma & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

koji ima rješenje $\alpha = -\frac{1}{3}t$, $\beta = \frac{2}{3}t$, $\gamma = t$, $t \in \mathbb{R}$.
Za $\lambda = 3$ vektori su komplanarni.

2) $\boxed{\lambda \neq 3}$ U ovom slučaju treću jednadžbu možemo podijeliti s $\lambda - 3$ i dobivamo

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta- & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta- & 2\gamma & = & 0 \\ & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Ako pomnožimo treću jednadžbu s 2 i dodamo drugoj te dodamo treću jednadžbu prvoj, dobivamo

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta & & = & 0 \\ & & \lambda\beta & & = & 0 \\ & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Sada opet imamo dva slučaja

2a) $\boxed{\lambda = 0}$ Imamo sustav

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta & & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

čije rješenje je $\alpha = -2t$, $\beta = t$, $\gamma = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Dakle, i za $\lambda = 0$ vektori su komplanarni.

$2b)$ $\boxed{\lambda \neq 0}$ Imamo sustav

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 \\ & & \beta & & & = & 0 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Konačno, za $\lambda \neq 0, 3$ vektori su nekomplanarni, a za $\lambda = 0$ i $\lambda = 3$ su komplanarni.

(b) Pitamo se postoje li $x, y, z \in \mathbb{R}$ takvi da za $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vektorska jednadžba $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{d} = \vec{0}$ ima samo trivijalno rješenje za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem vektora dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha\left(\vec{i} + \lambda\vec{k}\right) + \beta\left(2\vec{i} + \lambda\vec{j}\right) + \gamma\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) &= \vec{0}, \\ (\alpha + 2\beta + x\gamma)\vec{i} + (\lambda\beta + y\gamma)\vec{j} + (\lambda\alpha + z\gamma)\vec{k} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta + & x\gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta + & y\gamma & = & 0 \\ \lambda\alpha & & + & z\gamma & = & 0 \end{array}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s $-\lambda$ i dodajmo je trećoj.

$$\begin{array}{rcrlcl} \alpha & + & 2\beta + & x\gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta + & y\gamma & = & 0 \\ & & -2\lambda\beta + & (z - x\lambda)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu s 2 i dodajmo trećoj

$$\begin{array}{rcrlcl} \alpha & + & 2\beta + & x\gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta + & y\gamma & = & 0 \\ & & & (z - x\lambda + 2y)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Vidimo da u slučaju $\lambda \neq 0$ možemo izabrati $x, y, z \in \mathbb{R}$ takve da ovaj sustav ima jedinstveno rješenje. Jedan (ali ne i jedini mogući) izbor je $x = 1, y = 1, z = \lambda$, i tada imamo sustav:

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta + & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta + & \gamma & = & 0 \\ & & & 2\gamma & = & 0 \end{array}$$

Što ako je $\lambda = 0$? Tada imamo sustav

$$\begin{array}{rcrlcl} \alpha & + & 2\beta + & x\gamma & = & 0 \\ & & & y\gamma & = & 0 \\ & & & (z + 2y)\gamma & = & 0 \end{array}$$

odakle ne možemo dobiti jedinstveno rješenje.

Zašto je $\lambda = 0$ problematično? Jer za $\lambda = 0$ imamo vektore $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{i}$ koji su kolinearni pa će svaki treći vektor $\vec{d}$ ležati u istoj ravnini s njima.

1.5 Radijvektorska interpretacija sustava

1.5.1 Sustavi 2x2

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Uvođenjem vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $A = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $B = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $C = (c_1, c_2)$, prethodni sustav možemo zapisati kao

$$(c_1, c_2) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) \tag{1.14}$$

što se može zapisati i preko vektora kao

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \tag{1.15}$$

i obratno, jednadžbu (1.15) raspisivanjem svodimo na sustav (1.13). Analitičko–geometrijska interpretacija tretirala je sustav "po retcima", dok na ovaj način sustav tretiramo "po stupcima".
Vrijedi sljedeće:

1. Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni, onda sustav (1.13) ima jedinstveno rješenje.
2. Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni i
   (i) $\vec{c}$ kolinearan s njima, onda sustav (1.13) ima beskonačno mnogo rješenja.
   (ii) $\vec{c}$ nije s njima kolinearan, onda sustav (1.13) nema rješenja.

Primjer 1.17. (a)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

(a) Sustav ima jedinstveno rješenje $x = y = 1$ jer su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ očito nekolinearni.

(b) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja oblika $x = t$, $y = 2 - t$, $t \in \mathbb{R}$. Vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ su očito kolinearni, a za vektor $\vec{c}$ vrijedi $\vec{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.

(c) Sustav nema rješenje jer je $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} = \vec{b}$, dok $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} = 2(\vec{i} + \vec{j})$ nije s njima kolinearan.

Definicija 1.18. Definirajmo **determinantu sustava** (1.13) kao

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Rješavanjem sustava (1.13) možemo pokazati da sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$. Tada je rješenje dano u obliku

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Time smo dobili i kriterij kada su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ nekolinearni. Dakle, vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ su nekolinearni ako i samo ako je

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Geometrijska interpretacija determinante: $\left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$ je površina paralelograma razapetog s $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Pokušajmo riješiti zadatak 1.2 preko determinanti.
ZADATAK 1.10. Odredite $h, k \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$x + 2y = k$$
$$4x + hy = 5$$

ima

1. jedinstveno rješenje,
2. beskonačno mnogo rješenja,
3. nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.
RJEŠENJE

(a) Sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} \neq 0$ ako i samo ako je $h - 8 \neq 0$. Tada je (kao i prije) rješenje dano s

$$x = \frac{kh - 10}{h - 8}, \quad y = \frac{5 - 4k}{h - 8}.$$

(b) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} = h - 8 \neq 0$ i $\vec{c}$ je kolinearan s $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kolinearnost možemo opet provjeriti preko determinante. Zadnji uvjet je ekvivalentan tome da je

$$0 = \det\left(\vec{a}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4k.$$

Dakle, sustav ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je $h = 8$ i $k = \frac{5}{4}$.

To smo mogli vidjeti i rješavajući sustav.

(c) Sustav nema rješenja ako i samo ako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$ ako i samo ako je $h = 8$, $k \neq \frac{5}{4}$.

Naravno, zadnji uvjet smo mogli dobiti i iz prva dva slučaja kao preostale vrijednosti za h i k.

1.5.2 Sustavi 3x3

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Uvođenjem vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{v} = \overrightarrow{OD}$, $D = (d_1, d_2, d_3)$, kao i prije dobivamo

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \tag{1.17}$$

Svako rješenje (x, y, z) sustava (1.16) ujedno je i rješenje vektorske jednadžbe (1.17), i obratno. Analizirajmo sustav (1.16) razmatrajući geometrijski položaj vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{v}$:

(A) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, onda rješenje sustava postoji i jedinstveno je.

(B) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni i nekolinearni, imamo sljedeće slučajeve

- (B1) Ako $\vec{v}$ nije komplanaran s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje sustava ne postoji.
- (B2) Ako je $\vec{v}$ komplanaran s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje postoji i skup rješenja je beskonačan te ovisi o jednom slobodnom parametru.

(C) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ kolinearni, onda imamo sljedeće slučajeve

- (C1) Ako $\vec{v}$ nije kolinearan s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje sustava ne postoji.
- (C2) Ako je $\vec{v}$ kolinearan s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje sustava postoji. Skup rješenja je beskonačan i ovisi o dva slobodna parametra.

Zadatak 1.11. Riješite sljedeće sustave i kod svakog vektorskom interpretacijom ustanovite razloge (ne)postojanja rješenja. Ako rješenje postoji, opravdajte strukturu skupa rješenja geometrijskim (vektorskim) argumentima.

(a)

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\
2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 40
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\
2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\
-x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3
\end{aligned}
$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 - & & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 + & & 5x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & x_2 + & & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Rješenje

(a) Primijetimo da je ovo isti sustav kao u primjeru 1.3, gdje smo metodom svođenja na trokutasti sustav dobili jedinstveno rješenje $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Promatramo točke $A = (2,4,3)$, $B = (4,5,1)$, $C = (6,6,-2)$, $D = (18,24,4)$. Razlog tome što smo dobili jedinstveno rješenje je što su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, što se može utvrditi direktnom provjerom. Jednadžba

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

daje isti sustav, samo homogen

$$\begin{array}{rcrcl} 2\alpha & + & 4\beta + & 6\gamma & = 0 \\ 4\alpha & + & 5\beta + & 6\gamma & = 0 \\ 3\alpha & + & \beta - & 2\gamma & = 0 \end{array}$$

Rješavajući ga na isti način, dobivamo $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(b) Primijetimo da je ovo isti sustav kao u zadatku 1.1 pod a), gdje smo pokazali da nema rješenja.

Vektorska interpretacija: $A = (2,4,2)$, $B = (4,5,7)$, $C = (6,6,12)$, $D = (18,24,40)$. Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni, ali $\vec{v}$ nije s njima komplanaran. Kako to vidjeti? Na primjer, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ daje sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha + 4\beta &= 6 \\ 4\alpha + 5\beta &= 6 \\ 2\alpha + 7\beta &= 12 \end{aligned}$$

koji ima rješenje $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Dakle, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ su komplanarni. Da $\vec{v}$ nije s njima komplanaran, dobijemo upravo rješavajući početni sustav.

(c) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Na primjer, $x_1 = 3 + \frac{2}{9}t$, $x_2 = \frac{8}{9}t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Mogli smo i drugačije izabrati slobodni parametar. Na primjer, $x_1 = 3 - \frac{1}{4}t$, $x_2 = t$, $x_3 = \frac{9}{8}t$, $t \in \mathbb{R}$.

Vektorska interpretacija: uzmemo točke $A = (3,2,-1)$, $B = (6,-5,16)$, $\mathbb{C} = (-6,4,-14)$, $D = (9,6,-3)$. Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni jer je

$$2\vec{a} + 8\vec{b} + 9\vec{c} = \vec{0}.$$

Nadalje, $\vec{v} = 3\vec{a}$ pa je $\vec{v}$ komplanaran s $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. I odavde možemo doći do skupa rješenja. Na primjer,

$$\vec{v} = 3\vec{a} = 3\vec{a} + z\vec{c} - z\vec{c} = 3\vec{a} - z\left(-\frac{2}{9}\vec{a} - \frac{8}{9}\vec{b}\right) + z\vec{c} = \vec{a}\underbrace{\left(3 + \frac{2}{9}z\right)}_{x_1} + \vec{b}\underbrace{\left(\frac{8}{9}z\right)}_{x_2} + \underbrace{z}_{x_3}\vec{c}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

(d) Uočimo da se radi o homogenom sustavu pa on sigurno ima rješenje. Rješavanjem sustava dobivamo $x_1 = -\frac{4}{5}t$, $x_2 = \frac{9}{5}t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Interpretacija je ista kao i u prethodnom zadatku. Uzmemo točke $A = (1,4,6)$, $B = (1,-1,1)$, $C = (-1,5,3)$, $D = (0,0,0)$.

Tada vrijedi

$$4\vec{a} - 9\vec{b} = 5\vec{c} \implies \vec{c} = \frac{4}{5}\vec{a} - \frac{9}{5}\vec{b}$$

pa su oni komplanarni. Nikoja dva nisu kolinearna (provjerite!). Očito je tada

$$\vec{v} = \vec{0} = t\left(-\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{9}{5}\vec{b} + \vec{c}\right), \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

DZ 1.3. Odredite za koje su $t \in \mathbb{R}$ vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ nekomplanarni. (Rješenje: $t \neq 1$)

DZ 1.4. Odredite za koje su $p \in \mathbb{R}$ vektori $\vec{a} = (p-1)\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = (p+4)\vec{i} + (p-2)\vec{j}$ kolinearni. (Rješenje: $p = -1, 6$)

DZ 1.5. Jesu li vektori $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ komplanarni? (Rješenje: Ne)

Poglavlje 2

Vektorski prostori

Definicija 2.1. Ako su na skupu $V \neq \emptyset$ definirane operacije $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ sa svojstvima

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in V$,

(2) $\exists 0 \in V$ t.d. $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in V$,

(3) $\forall a \in V$ $\exists (-a) \in V$ t.d. $a + (-a) = -a + a = 0$,

(4) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in V$,

(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$,

(6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$,

(7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a, b \in V$,

(8) $1 \cdot a = a$, $\forall a \in V$,

kažemo da je $(V, +, \cdot)$ realni ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$), odnosno kompleksni ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) **vektorski prostor**. Ovo obično kratimo u: V je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Elemente od V zovemo vektori, a elemente od $\mathbb{F}$ skalari.

Uočimo sljedeće:

- činjenicu da je kodomena preslikavanja $+$ jednaka V možemo iskazati na ekvivalentan način: ako su $a, b \in V$ tada je $a + b \in V$. Ovo svojstvo nazivamo zatvorenost skupa V na zbrajanje
- činjenicu da je kodomena preslikavanja $\cdot$ jednaka V možemo iskazati na ekvivalentan način: ako su $\alpha \in \mathbb{F}$ i $a \in V$ tada je $\alpha a \in V$. Ovo svojstvo nazivamo zatvorenost skupa V na množenje skalarima.

Napomena 2.2. U svakom vektorskom prostoru još vrijedi

a) $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ili $x = 0$

b) $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$

c) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$

d) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

Primjer 2.3 (Standardni primjeri).

a) $V^2(O)$ i $V^3(O)$ su vektorski prostori nad $\mathbb{R}$ s obzirom na zbrajanje radijvektora i množenje radijvektora skalarom kako smo prethodno definirali.

b) Sami skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ uz uobičajeno zbrajanje brojeva i množenje skalarom po koordinatama.

c) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ uz koordinatno zbrajanje i množenje skalarima (to jest, standardne operacije zbrajanja i množenje skalarima)

d) $M_{mn}(\mathbb{F})$ uz zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima po elementima (standardne operacije zbrajanja i množenje skalarima)

e) $\mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog od n uz standardne operacije zbrajanja polinoma i množenja polinoma skalarima

f) $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma uz standardne operacije zbrajanja polinoma i množenja polinoma skalarima

g) Neka je S skup i $\mathbb{F}$ polje. Skup funkcija $\mathbb{F}^S = \{f : S \to \mathbb{F}\}$, uz operacije "po točkama":

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \tag{2.1}$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x). \tag{2.2}$$

je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Provjerimo svojstva $(1)-(8)$ vektorskih prostora. Neka su $f, g, h \in \mathbb{F}^S$ proizvoljne i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ proizvoljni.

(1) $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x)+h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$.

(2) Neka je $f_0(x) = 0$ za sve $x \in S$.
$(f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x) + 0 = f(x) = 0 + f(x) = f_0(x) + f(x) = (f_0+f)(x)$.

(3) Neka je $(-f)(x) = -1 \cdot f(x)$ za sve $x \in S$.
$((-f)+f)(x) = (-f)(x) + f(x) = -1 \cdot f(x) + f(x) = 0 = f_0(x) = f(x) + (-1 \cdot f(x)) = f(x) + (-f)(x) = (f+(-f))(x)$.

(4) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$.

(5) $(\alpha(\beta f))(x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x)$.

(6) $((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = ((\alpha f) + (\beta f))(x)$.

(7) $(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = ((\alpha f) + (\alpha g))(x)$.

(8) $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$.

h) Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Tada je V uz operaciju množenja restringiranu na $\mathbb{R} \times V$, preciznije $(V, +, \cdot|_{\mathbb{R}\times V})$ vektorski prostor. Oznaka je $V_{\mathbb{R}}$.

Pokažimo da smo dobili vektorski prostor. Jednakosti u $(5)-(7)$ kod V vrijede za sve kompleksne skalare, pa onda i za sve realne skalare. Dakle vrijede za $(V, +, \cdot|_{\mathbb{R}\times V})$. Svojstva $(1) - (4)$ vrijede za $V_{\mathbb{R}}$ jer su skup vektora i operacija zbrajanja nepromijenjeni, a vrijede za V. Svojstvo (8) vrijedi jer za svaki $a \in V_{\mathbb{R}}$ imamo $(1, a) \in \mathbb{R} \times V \subseteq \mathbb{C} \times V$, pa je po definiciji restrikcije

$$1 \cdot|_{\mathbb{R}\times V} a = 1 \cdot a = a.$$

Zadatak 2.1. Provjerite da je $\mathbb{C}^n$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ uz standardno definirane operacije. Oznaka: $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

RJEŠENJE Ovo je poseban slučaj standardnog primjera h) za $V = \mathbb{C}^n$.

ZADATAK 2.2. Za svaki od sljedećih skupova navedite po tri njegova elementa, a zatim provjerite je li on realni vektorski prostor uz koordinatno zbrajanje i množenje skalarima.

a) $M = \mathbb{Q}^2$

b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}$ (skicirati skup u ravnini)

c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$ (skicirati skup u ravnini)

d) skup M svih točaka ravnine na pravcu $y = 2x$ (skicirati skup u ravnini, zapisati kao podskup od $\mathbb{R}^2$)

e) skup M svih točaka ravnine na pravcu $y = 2x + 1$ (skicirati skup u ravnini)

RJEŠENJE

a) Imamo $(1, 0), (2, 0), (3, 0) \in M$. Za $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i $(1, 0) \in M$ vrijedi $\sqrt{2} \cdot (1, 0) = (\sqrt{2}, 0) \notin M$, pa M nije vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

b) Imamo $(-1, 0), (-2, 0), (-3, 0) \in M$. Za $-1 \in \mathbb{R}$ i $(-1, 0) \in M$ vrijedi $-1 \cdot (-1, 0) = (1, 0) \notin M$, pa M nije vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

c) Imamo $(1, 0), (2, 0), (3, 0) \in M$. Za $-1 \in \mathbb{R}$ i $(1, 0) \in M$ vrijedi $-1 \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin M$, pa M nije vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

d) Uočimo $M = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$. Neka su $(x, 2x), (y, 2y), (z, 2z) \in M$ proizvoljni, te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Vrijedi

$$(x, 2x) + (y, 2y) = (x + y, 2x + 2y) = (x + y, 2(x + y)) \in M,$$
$$\alpha(x, 2x) = (\alpha x, \alpha 2x) = (\alpha x, 2(\alpha x)) \in M.$$

Dakle, definirane su operacije $+ : M \times M \to M$ i $\cdot : \mathbb{R} \times M \to M$. Provjerimo svojstva $(1) - (8)$ vektorskih prostora:

(1) $((x, 2x) + (y, 2y)) + (z, 2z) = (x + y, 2(x + y)) + (z, 2z) = ((x + y) + z, 2((x + y) + z)) = (x + (y + z), 2(x + (y + z))) = (x, 2x) + (y + z, 2(y + z)) = (x, 2x) + ((y, 2y) + (z, 2z))$

(2) za $(0, 0) \in M$ vrijedi $(x, 2x) + (0, 0) = (x + 0, 2(x + 0)) = (x, 2x) = (0 + x, 2(0 + x)) = (0, 0) + (x, 2x)$.

(3) $(-x, 2(-x)) + (x, 2x) = (0, 0) = (x, 2x) + (-x, 2(-x))$.

(4) $(x, 2x) + (y, 2y) = (x + y, 2(x + y)) = (y + x, 2(y + x)) = (y, 2y) + (x, 2x)$.

(5) $\alpha(\beta(x, 2x)) = \alpha(\beta x, 2\beta x) = (\alpha(\beta x), 2\alpha(\beta x)) = ((\alpha\beta)x, 2(\alpha\beta)x) = (\alpha\beta)(x, 2x)$.

(6) $(\alpha + \beta)(x, 2x) = ((\alpha + \beta)x, 2(\alpha + \beta)x) = (\alpha x + \beta x, 2(\alpha x + \beta x)) = (\alpha x + \beta x, 2\alpha x + 2\beta x) = (\alpha x, 2\alpha x) + (\beta x, 2\beta x) = \alpha(x, 2x) + \beta(x, 2x)$.

(7) $\alpha(x + y, 2(x + y)) = (\alpha x + \alpha y, 2(\alpha x + \alpha y)) = (\alpha x, 2\alpha x) + (\alpha y, 2\alpha y) = \alpha(x, 2x) + \alpha(y, 2y)$.

(8) $1 \cdot (x, 2x) = (1 \cdot x, 1 \cdot 2x) = (x, 2x)$.

e) Uočimo da je $(0, 1) \in M$, ali $2 \cdot (0, 1) \notin M$.

Ili: pretpostavimo da postoji neutralan element $(x_0, y_0) \in M$. Dakle $(x_0, y_0) + (x, y) = (x, y)$ za sve $(x, y) \in M$. Posebno za $(x, y) = (0, 1) \in M$, imamo $(x_0, y_0 + 1) = (0, 1)$. Slijedi $x_0 = y_0 = 0$, pa je $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Međutim, ovdje dolazimo do kontradikcije jer $(0, 0) \notin M$.

□

ZADATAK 2.3. Za svaki od sljedećih skupova navedite po tri njegova elementa, a zatim provjerite je li on realni vektorski prostor uz standarno definirane operacije zbrajanja i množenja skalarima.

a) skup svih polinoma s realnim koeficijentima stupnja barem 5 zajedno s nulpolinomom

b) skup svih polinoma s realnim koeficijentima neparnog stupnja zajedno s nulpolinomom

RJEŠENJE Neka je S opisani skup. Imamo:

a) $0, t^5, -t^5+1 \in S$. Vrijedi $t^5 + (-t^5+1) = 1 \notin S$, pa S nije vektorski prostor.

b) $0, t^3+1, -t^3 \in S$. Vrijedi $t^3+1+(-t^3) \notin S$, pa S nije vektorski prostor.

ZADATAK 2.4. Dokažite da svaki (realni ili kompleksni) vektorski prostor $V \neq \{0\}$ sadrži beskonačno mnogo vektora.

RJEŠENJE Uzmimo $x \neq 0$. Sada $\alpha \neq \beta$ povlači da je $\alpha x \neq \beta x$. Zaista,

$$\alpha x = \beta x \ \Rightarrow\ \alpha x - \beta x = 0 \ \Rightarrow\ (\alpha - \beta)x = 0 \ \Rightarrow\ \alpha - \beta = 0$$

što je kontradikcija.

ZADATAK 2.5. Neka je V skup svih (beskonačnih) nizova realnih brojeva. Definirajmo

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) + (b_1, b_2, b_3, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots), \tag{2.3}$$
$$\alpha(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \ldots), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

(a) Provjerite je li V realan vektorski prostor uz ovako definirane operacije.

(b) Neka je $A \subset V$ skup svih aritmetičkih nizova. Je li A realan vektorski prostor uz iste operacije?

(c) Neka je $G \subset V$ skup svih geometrijskih nizova. Je li G realan vektorski prostor uz iste operacije?

RJEŠENJE

(a) Uočimo $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pa je V realan vektorski prostor po jednom od standardnih primjera, no možemo to i raspisati. Skratimo oznake: neka su $(a_1, \ldots)$ i $(b_1, \ldots)$ nizovi i $\alpha \in \mathbb{R}$. Imamo

$$(a_1, \ldots) + (b_1, \ldots) = (a_1 + b_1, \ldots) \in V,$$
$$\alpha(a_1, \ldots) = (\alpha a_1, \ldots) \in V.$$

Provjerimo svojstva $(1) - (8)$, vektorskih prostora. Neka su $(a_1, \ldots)$, $(b_1, \ldots)$ i $(c_1, \ldots)$ proizvoljni elementi od V, te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Imamo

(1) $[(a_1, \ldots) + (b_1, \ldots)] + (c_1, \ldots) = (a_1 + b_1, \ldots) + (c_1, \ldots) = ((a_1 + b_1) + c_1, \ldots) = (a_1 + (b_1 + c_1, \ldots) = (a_1, \ldots) + (b_1 + c_1, \ldots) = (a_1, \ldots) + [(b_1, \ldots) + (c_1, \ldots)]$

(2) za $(0, \ldots) \in V$ vrijedi $(a_1, \ldots) + (0, \ldots) = (a_1 + 0, \ldots) = (a_1, \ldots) = (0 + a_1, \ldots) = (0, \ldots) + (a_1, \ldots)$.

(3) za $(-a_1, \ldots) \in V$ vrijedi $(-a_1, \ldots) + (a_1, \ldots) = (0, \ldots) = (a_1, \ldots) + (-a_1, \ldots)$.

(4) $(a_1, \ldots) + (b_1, \ldots) = (a_1 + b_1, \ldots) = (b_1 + a_1, \ldots) = (b_1, \ldots) + (a_1, \ldots)$

(5) $\alpha(\beta(a_1, \ldots)) = \alpha(\beta a_1, \ldots) = (\alpha(\beta a_1), \ldots) = ((\alpha\beta)a_1, \ldots) = (\alpha\beta)(a_1, \ldots)$

(6) $(\alpha+\beta)(a_1,\dots) = ((\alpha+\beta)a_1,\dots) = (\alpha a_1+\beta a_1,\dots) = (\alpha a_1,\dots)+(\beta a_1,\dots) = \alpha(a_1,\dots)+\beta(a_1,\dots)$

(7) $\alpha(a_1+b_1,\dots) = (\alpha(a_1+b_1),\dots) = (\alpha a_1+\alpha b_1,\dots) = (\alpha a_1,\dots)+(\alpha b_1,\dots) = \alpha(a_1,\dots)+\alpha(b_1,\dots)$.

(8) $1\cdot(a_1,\dots) = (1\cdot a_1,\dots) = (a_1,\dots)$.

(b) Aritmetički niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz za koji postoji $d\in\mathbb{R}$ takav da vrijedi $a_n = a_1+(n-1)d$, za sve $n\in\mathbb{N}$. Neka su dani aritmetički nizovi $a_n = a_1+(n-1)d$, $b_n = b_1+(n-1)k$ i $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$a_n+b_n = a_1+b_1+(n-1)(d+k) \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}}+(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A$$
$$\alpha a_n = \alpha a_1+(n-1)\alpha d \implies \alpha\cdot(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A$$

Dakle, definirane su operacije $+ : A\times A\to A$ i $\cdot : \mathbb{R}\times A\to A$.

Uočimo $(0,\dots) = 0\cdot(a_1, a_1+d,\dots)$ i

$$(-a_1,\dots,-a_1+(n-1)(-d),\dots) = (-1)\cdot(a_1,\dots,a_1+(n-1)d,\dots)$$

jesu aritmetički nizovi. Prvi je neutralan za zbrajanje svih, pa i aritmetičkih nizova, a drugi je inverz od $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. I ostala svojstva vektorskih prostora vrijede, jer po (a) vrijede za sve nizove, pa onda i za aritmetičke nizove.

(c) Geometrijski niz je niz oblika $(a_1, a_1q, a_1q^2,\dots)$. Nizovi $(1,2,4,\dots)$ i $(1,3,9,\dots)$ jesu geometrijski, ali njihov zbroj $(2,5,13,\dots)$ nije geometrijski jer $5/2\neq 13/5$. Geometrijski nizovi ne čine vektorski prostor.

□

Zadatak 2.6. U $\mathbb{R}^2$ ostavimo standardno zbrajanje i uvedemo novo množenje skalarom formulom $\alpha(x,y) = (\alpha x, y)$. Je li to vektorski prostor?

Rješenje Ne. Prvi od aksioma koji ovdje nije zadovoljen je distributivnost u odnosu na skalarni faktor. Moralo bi biti $(\alpha+\beta)v = \alpha v+\beta v$, $\forall\alpha,\beta,v$, odnosno

$$((\alpha+\beta)x, y) = (\alpha x, y)+(\beta x, y) = (\alpha x+\beta x, 2y), \quad \forall\alpha,\beta,x,y.$$

Čim je $y\neq 0$ gornja jednakost ne vrijedi. □

DZ 2.1. Provjerite da je $M_{mn}(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ realan vektorski prostor.

DZ 2.2. Za svaki od sljedećih skupova navedite po tri njegova elementa, a zatim provjerite je li on realni vektorski prostor.

a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\leq 0, y\geq 0\}$,

b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0\}$,

c) $\left\{\begin{bmatrix} a & a \\ a & a\end{bmatrix} : a\in\mathbb{R}\right\}$,

d) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c\end{bmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

DZ 2.3. U $\mathbb{R}^2$ ostavimo standardno zbrajanje i uvedemo novo množenje skalarom formulom $\alpha(x,y) = (\alpha x, 0)$. Je li to vektorski prostor?

2.1 Linearna nezavisnost

DEFINICIJA 2.4. Skup $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ u vektorskom prostoru V je **linearno nezavisan** ako vrijedi

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0. \tag{2.5}$$

U protivnom se kaže da je skup **linearno zavisan**.

Također, ako vektori $x_1, \ldots, x_k \in V$ zadovoljavaju (2.5), reći ćemo da su međusobno linearno nezavisni. Ako ne zadovoljavaju (2.5), reći ćemo da su međusobno linearno zavisni.

ČINJENICE 2.5. (a) Skup $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je linearno zavisan ako postoje $\alpha_i \in \mathbb{F}$, ne svi jednaki 0, takvi da je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$.

(b) Jednočlan skup $\{x\}$ je linearno nezavisan ako i samo ako je $x \neq 0$.

(c) Podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan.
(Ovo služi kao temelj definicije nezavisnosti za beskonačne skupove: kaže se da je beskonačan skup linearno nezavisan ako je svaki njb egov konačan podskup linearno nezavisan.)

(d) Nadskup linearno zavisnog skupa je linearno zavisan. Posebno, svaki skup koji sadrži 0 je linearno zavisan.

(e) Linearna nezavisnost/zavisnost ne ovisi o poretku vektora.

(f) Niti jedan vektor osim 0 sam po sebi ne uzrokuje linearnu nezavisnost ili zavisnost skupa čiji je član. Primjer: $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\{\vec{i}, 2\vec{i}\}$.

(g) Skup $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je linearno zavisan ako i samo ako postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija preostalih. Ako je S linearno zavisan i $x_1 \neq 0$ (i pritom S smatramo uređenim), onda postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija svojih prethodnika u S.

(h) Neka su $a, b \neq 0$ proizvoljni vektori iz vektorskog prostora V. Tada je $\{a, b\}$ zavisan ako i samo ako je $b = \alpha a$ za neki $\alpha \in \mathbb{F}$.

Na predavanjima smo dokazali sljedeće:

(1) Dva nekolinearna vektora $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ bilo u $V^2(O)$, bilo u $V^3(O)$, čine linearno nezavisan skup. Isto vrijedi za tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$.

(2) Skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je linearno nezavisan i u $\mathbb{R}^n$, i u $\mathbb{C}^n$.

(3) Skup $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ je linearno nezavisan u $\mathcal{P}_n$.

(4) Skup $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ je linearno nezavisan u M_{mn}.

ZADATAK 2.7. Ispitajte linearnu nezavisnost skupa $\{a_1, a_2, a_3\}$ u $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ uz standardne operacije) ako je $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $a_3 = (1, -2, 1)$.

RJEŠENJE 1. način: koristeći kriterij linearne zavisnosti (g) u Činjenice 2.5.

$$\begin{aligned}
&a_1 \neq (0,0,0),\\
&a_2 = \alpha_1 a_1 \implies (1,2,1) = (\alpha_1, 0, \alpha_1) \implies 2 = 0, \text{ ne vrijedi},\\
&a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \implies (1,-2,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,2,1).
\end{aligned}$$

Zadnja jednadžba daje sustav

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 &= 1\\
2\alpha_2 &= -2\\
\alpha_1 + \alpha_2 &= 1
\end{aligned}$$

Odakle slijedi $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$, pa je skup linearno zavisan.
2. način: po definiciji. Tražimo rješenje jednadžbe $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$. Raspisivanjem imamo sustav

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0\\
2\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0\\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0
\end{aligned}$$

Imamo $\alpha_2 = \alpha_3 = t \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = -2t$. Dakle, rješenje početne jednadžbe nije jedinstveno, pa je skup linearno zavisan. □

ZADATAK 2.8. Je li skup $\{(1,0,0), (i,0,0)\}$ linearno nezavisan u $\mathbb{C}^3$? A u $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$?
RJEŠENJE Pitanje je je li skup $\{(1,0,0),(i,0,0)\}$ linearno zavisan u nekom od $\mathbb{C}^3$ ili $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$? Koristimo kriterij linearne zavisnosti.

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &\neq (0,0,0)\\
(i,0,0) &= \alpha(1,0,0) = (\alpha,0,0) \implies \alpha = i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vektori su linearno zavisni u $\mathbb{C}^3$, ali ne i u $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$. □

ZADATAK 2.9. Odredite nužan i dovoljan uvjet na kompleksne brojeve x i y tako da je skup $\{(1,x),(2,y)\}$ linearno zavisan u $\mathbb{C}^2$.
RJEŠENJE Koristimo kriterij linearne zavisnosti

$$\begin{aligned}
(1,x) &\neq (0,0)\\
(2,y) &= \alpha(1,x) = (\alpha, \alpha x) \implies \alpha = 2, y = 2x.
\end{aligned}$$

Nužno je i dovoljno $y = 2x$. □

ZADATAK 2.10. Odredite nužan i dovoljan uvjet na kompleksne brojeve x, y, z tako da je skup $\{(1,x,x^2),(1,y,y^2),(1,z,z^2)\}$ linearno zavisan u $\mathbb{C}^3$.
RJEŠENJE Koristimo definiciju linearne nezavisnosti. Skup $\{(1,x,x^2),(1,y,y^2),(1,z,z^2)\}$ je linearno nezavisan ako jednadžba

$$\alpha(1,x,x^2) + \beta(1,y,y^2) + \gamma(1,z,z^2) = (0,0,0),$$

u α, β i γ ima jedinstveno rješenje. Imamo sustav

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= 0\\
x\alpha + y\beta + z\gamma &= 0\\
x^2\alpha + y^2\beta + z^2\gamma &= 0
\end{aligned}$$

Prvu jednadžbu pomnoženu sa $-x$ dodajemo drugoj, te pomnoženu sa $-x^2$ dodajemo trećoj. Imamo

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma &=0\\ (y-x)\beta+(z-x)\gamma &=0\\ (y^2-x^2)\beta+(y^2-x^2)\gamma &=0\end{aligned}$$

Drugu jednadžbu pomnoženu sa $-(y+x)$ dodajemo trećoj i nakon sređivanja imamo

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma &=0\\ (y-x)\beta+(z-x)\gamma &=0\\ (z-x)(z-y)\gamma &=0\end{aligned}$$

Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako su x, y i z međusobno različiti. To je traženi uvjet.

Zadatak 2.11. Za sljedeće podskupove od $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ provjerite njihovu linearnu (ne)zavisnost.

(a) $\{f,g,h\}$, gdje je $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ i $h(x)=\cos(x+\frac{\pi}{4})$,

(b) $\{f,g,h\}$, gdje je $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ i $h(x)=\sin 2x$,

(c) $\{f,g,h\}$, gdje je $f(x)=(x-1)^2, g(x)=(x+2)^2, h(x)=(x-1)(x+2)$,

(d) $\{f,g,h\}$, gdje je $f(x)=a, g(x)=e^x, h(x)=e^{2x}$, a $a\in\mathbb{R}$ je konstanta,

Rješenje

a) $h(x)=\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}g(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}f(x)$. Skup je linearno zavisan.

b) Pretpostavimo da postoje α, β i γ takvi da za svaki x vrijedi

$$\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma\sin 2x=0.$$

Sada uvrštavamo: $x=0\Rightarrow\beta=0$, $x=\pi/2\Rightarrow\beta=0$, $x=\pi/4\Rightarrow\gamma=0$. Skup je linearno nezavisan.

c) Pretpostavimo da postoje α, β i γ takvi da za svaki x vrijedi

$$\alpha(x-1)^2+\beta(x+2)^2+\gamma(x-1)(x+2)=0.$$

Sada uvrštavamo: $x=1\Rightarrow\beta=0$, $x=-2\Rightarrow\alpha=0$, $x=3\Rightarrow\gamma=0$. Skup je linearno nezavisan.

Alternativno, imamo

$$(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(-2\alpha+2\beta+\gamma)x+\alpha+4\beta-2\gamma=0.$$

Sada sustav $\alpha+\beta+\gamma=-2\alpha+2\beta+\gamma=\alpha+4\beta-2\gamma=0$ ima jedinstveno rješenje $\alpha=\beta=\gamma=0$, pa je skup linearno nezavisan.

d) Ako je $a=0$, skup je linearno zavisan. Neka je $a\neq 0$. Pretpostavimo dan postoje α, β i γ takvi da za svaki t vrijedi $\alpha a+\beta e^t+\gamma e^{2t}=0$. Uvrštavanjem $t=1,2,3$ dobijemo sustav koji riješimo:

$$\begin{aligned}\alpha a+\beta+\gamma&=0 \qquad & \alpha a+\beta+\gamma&=0 \qquad & \alpha a+\beta+\gamma&=0\\ \alpha a+4\beta+8\gamma&=0 & 3\beta+7\gamma&=0 & 3\beta+7\gamma&=0\\ \alpha a+9\beta+27\gamma&=0 & 8\beta+26\gamma&=0 & (26-7\cdot(8/3))\gamma&=0\end{aligned}$$

Slijedi $\alpha=\beta=\gamma=0$. Skup je linearno nezavisan.

ZADATAK 2.12. Neka je V vektorski prostor i $n \in \mathbb{N}$, te neka je skup $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ linearno nezavisan. Provjerite linearnu nezavisnost skupova

$$A = \{x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_1\},$$

$$B = \{x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n\}.$$

RJEŠENJE Uočimo $-\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1}) = x_n - x_1$. Skup A je linearno zavisan. Pretpostavimo

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(x_i - x_{i+1}) + \alpha_n x_n = 0$$

Imamo $\alpha_1 x_1 + *x_2 + \ldots + *x_n = 0$, pa je $\alpha_1 = 0$. Slično $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$. Ostaje $\alpha_n x_n = 0$, pa je i $\alpha_n = 0$. Skup B je linearno nezavisan. □

DZ 2.4. Provjerite jesu li sljedeći skupovi linearno nezavisni:

(a) $\{E_{ij} + E_{ji} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ u M_{mn}.

(b) $\{(1, 9, 7), (2, 1, 1), (-1, 8, 6)\}$ u $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\}$ u $\mathbb{C}^4$.

(d) $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ u $\mathbb{R}^4$.

(e) $\{1, t - 1, (t - 1)^2, (t - 1)^3\}$ u $\mathcal{P}_3$.

(f) $\{f_1, f_2, f_3\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$, $f_2(x) = x^2 + 2x - 7$, $f_3(x) = 3x - 9$.

DZ 2.5. Odredite nužan i dovoljan uvjet na vektore $v \in \mathbb{R}^4$ tako da skup $\{e_1, e_2, e_3, v\}$ bude linearno nezavisan.

DZ 2.6. Neka je $\{x, y\}$ linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru V. Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$. Odredite nužan i dovoljan uvjet da skup $\{\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y\}$ bude nezavisan.

DZ 2.7. Neka je skup $\{x, y, z\}$ linearno nezavisan u V. Kakav je $\{x + y, y + z, z + x\}$?

2.2 Linearna ljuska i sustav (skup) izvodnica

DEFINICIJA 2.6. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te $\emptyset \neq S \subseteq V$. **Linearna ljuska od** S, u oznaci $[S]$ se definira kao

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Za $S = \emptyset$ definiramo $[S] = \{0\}$.
Skup $S \subseteq V$ je **sustav ili skup izvodnica (generatora)** za V ako vrijedi $[S] = V$. Ovo znači da se svaki vektor iz V može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz S.

ČINJENICE 2.7. (a) Ako je $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ konačan, tada je

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{F} \right\}$$

(b) Ako su $S_1, S_2 \subseteq V$ takvi da je $S_1 \subseteq S_2$, tada je $[S_1] \subseteq [S_2]$.

(c) Nadskup sustava izvodnica je također sustav izvodnica.

(d) Trivijalno je $[V] = V$; umijeće je naći čim manji skup izvodnica.

(e) Primjer: dva nekolinearna vektora u $V^2(O)$, tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$.

(f) Primjer: $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za $\mathbb{R}^n$ (isto za $\mathbb{C}^n$).

(g) Ako je S sustav izvodnica za V i ako se neki vektor iz S može prikazati kao linearna kombinacija ostalih članova iz S, onda je i $S \setminus \{x\}$ sustav izvodnica za V.

(h) Biti sustav izvodnica za V nije ni u kakvoj uzročno posljedičnoj vezi s linearnom nezavisnošću/zavisnošću.

Primjer: tri vektora u $V^2(O)$, dva nekolinearna vektora u $V^3(O)$.

(i) Po definiciji kažemo da je V **konačnodimenzionalan** ako postoji bar jedan konačan sustav izvodnica za V. Naši standardni primjer su takvi, uočimo da $\mathcal{P}$ nije (nije niti $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, niti $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$). Još uočimo da je i $\{0\}$ konačnodimenzionalan na trivijalan način.

ZADATAK 2.13. U vektorskom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ odredite, ako postoji, konačan skup S takav da je

(a) $[S] = M_2(\mathbb{R})$,

(b) $[S] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$,

(c) $[S] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$,

(d) $[S] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

RJEŠENJE Koristimo svojstvo (a) iz Činjenice 2.7.

(a) Možemo uzeti $S = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ jer vrijedi

$$\begin{aligned} M_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \\ &= [\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}]. \end{aligned}$$

(b) Možemo uzeti $S = \{E_{11}, E_{21}, E_{22}\}$ jer vrijedi

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = [\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}].$$

(c) Primijetimo kako općenito za svaki vektorski prostor V i $\emptyset \neq S \subseteq V$ imamo $0 \in [S]$. Kako zadani skup ne sadrži nulvektor, slijedi da ne postoji traženi S.

(d) Možemo uzeti $S = \{E_{11} + E_{21} + E_{22}, E_{12} + E_{21} - E_{22}\}$ jer vrijedi

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\} = [\{E_{11} + E_{21} + E_{22}, E_{12} + E_{21} - E_{22}\}] .$$

Zadatak 2.14. Neka je S podskup vektorskog prostora V. Dokažite da je $[[S]] = [S]$.

Rješenje Očito je $[S] \subseteq [[S]]$. Pokažimo da je $[[S]] \subseteq [S]$. Elementi iz $[[S]]$ su linearne kombinacije elemenata iz $[S]$, dakle linearne kombinacije linearnih kombinacija elemenata iz S. Trebamo pokazati da smo na taj način dobili linearne kombinacije elemenata iz S. Zbog jednostavnijeg zapisa pokažimo da se linearna kombinacija **dva** elemenata iz $[S]$ može prikazati kao linearna kombinacija elemenata iz S.

Neka su $x, y \in [S]$. Tada je $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ i $y = \sum_{j=1}^{l} \beta_j y_j$ za neke skalare α_i, β_j i te $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_l$ elemente iz S. Tada je

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{k} \alpha\alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{l} \beta\beta_j y_j = (\text{lin komb elemenata iz S}) ,$$

dakle element iz $[S]$. □

Zadatak 2.15. Pokažite da skup $S = \{(a, b, c, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ nije sustav izvodnica za $\mathbb{R}^4$. Nađite, ako postoji, element $v \in \mathbb{R}^4$ takav da je skup $S \cup \{v\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^4$. Je li takav v jedinstven?

Rješenje Imamo

$$S = \{(a, b, c, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{ae_1 + b(e_2 + e_4) + ce_3 : a, b, c \in \mathbb{R}\} = [\{e_1, (e_2 + e_4), e_3\}].$$

Po Zadatku 2.14 je

$$[S] = [[\{e_1, (e_2 + e_4), e_3\}]] = [\{e_1, (e_2 + e_4), e_3\}] = S.$$

Dakle $[S] = S$. Sada $(0, 0, 0, 1) \notin S = [S]$, pa S nije sustav izvodnica za $\mathbb{R}^4$.
Ako uzmemo $v = e_4$, tada je $e_2 = (e_2 + e_4) - e_4 \in [S \cup \{v\}]$ pa imamo

$$\begin{aligned} \{e_1, e_2, e_3, e_4\} &\subseteq [S \cup \{v\}] \quad /[\quad] \\ \mathbb{R}^4 = [\{e_1, e_2, e_3, e_4\}] &\subseteq [[S \cup \{v\}]] = [S \cup \{v\}] \subseteq \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Slijedi $[S \cup \{v\}] = \mathbb{R}^4$, pa je $S \cup \{v\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^4$.
Odabir $v = e_4$ nije jedinstven, mogli smo uzeti $v = e_2$ i provesti sličan postupak. □

Zadatak 2.16. Neka su S_1 i S_2 podskupovi vektorskog prostora V. Dokažite da je $[S_1] = [S_2]$ ako i samo ako je $S_1 \subseteq [S_2]$ i $S_2 \subseteq [S_1]$.

Rješenje

Pretpostavimo $[S_1] = [S_2]$. Tada iz $S_1 \subseteq [S_1]$ slijedi $S_1 \subseteq [S_2]$, a iz $S_2 \subseteq [S_2]$ slijedi $S_2 \subseteq [S_1]$. Obratno, po Zadatku 2.14, iz $S_1 \subseteq [S_2]$ slijedi $[S_1] \subseteq [S_2]$, a iz $S_2 \subseteq [S_1]$ imamo $[S_2] \subseteq [S_1]$. Dakle $[S_1] = [S_2]$. □

Zadatak 2.17. Dokažite da je $[S_1] = [S_2]$, ako su S_1 i S_2 podskupovi od $\mathbb{R}^3$ zadani kao

$$S_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 4, 2)\}, \quad S_2 = \{(1, 2, 1), (1, 0, -1)\}.$$

RJEŠENJE Koristimo prethodni zadatak. Vrijedi

$$\begin{aligned}(1,1,0) &= \frac{1}{2}(1,2,1)+\frac{1}{2}(1,0,-1)\\ (0,1,1) &= (1,2,1)-(1,0,-1)\\ (2,4,2) &= 2(1,2,1),\end{aligned}$$

pa vidimo da je $S_1 \subseteq [S_2]$. S druge strane, imamo

$$\begin{aligned}(1,2,1) &= (1,1,0)+(0,1,1)\\ (1,0,-1) &= (1,1,0)-(0,1,1),\end{aligned}$$

pa je i $S_2 \subseteq [S_1]$. Stoga zaključujemo kako je $[S_1] = [S_2]$ prema prethodnom zadatku.

ZADATAK 2.18. Neka je $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 1\}$. Odredite $[S]$.
RJEŠENJE Uočimo da je $S_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,-1)\}$ podskup skupa S. Lako vidimo da je $[S_1] = \mathbb{R}^3$ pa slijedi $\mathbb{R}^3 = [S_1] \subseteq [S] \subseteq \mathbb{R}^3$, pa zaključujemo $[S] = \mathbb{R}^3$.

ZADATAK 2.19. Neka je $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0\}$. Odredite $[S]$.
RJEŠENJE Imamo

$$\begin{aligned}S =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\} = \{(x,y,x+y) : x,y \in \mathbb{R}\}\\ =& \{x(e_1+e_3)+y(e_2+e_3) : x,y \in \mathbb{R}\} = [\{e_1+e_3, e_2+e_3\}].\end{aligned}$$

Po Zadatku 2.14 imamo $[S] = [[\{e_1+e_3, e_2+e_3\}]] = [\{e_1+e_3, e_2+e_3\}] = S$.

Domaća zadaća

DZ 2.8. Neka je V vektorski prostor te $a,b,c \in V$ takvi da vrijedi $a+b+c = 0$. Dokažite da je

$$[\{a,b\}] = [\{b,c\}] = [\{a,c\}] = [\{a,b,c\}].$$

DZ 2.9. Je li skup $\{(1,1,0),(1,0,0)\}$ nezavisan/sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$?
Isto pitanje za skup $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(1,-1,1)\}$.
DZ 2.10. Odredite konačan skup S takav da je

a) $[S] = \{\begin{bmatrix} a+b & 2b-c \\ a-2b+c & 3a+5c\end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$,

b) $[S] = \{(a+2b+c, a-b) : a,b,c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

c) $[S] = \{(a+\overline{a}+b, b) : a,b \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ (uputa: $a = x+iy, b = u+iv; x,y,u,v \in \mathbb{R}$),

d) $\{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \subseteq P_2(\mathbb{R})$.

DZ 2.11. Pokaži:

a) $(1,0,3) \in [\{(1,0,0),(0,1,2),(0,2,1)\}] \subseteq \mathbb{R}^3$

b) $1+t \notin [\{t^2+t+2, t^2+2t\}] \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,

c) $(3+i, 1+i) \in [\{(1+i,2),(1-i,i)\}] \subseteq \mathbb{C}^2$,

d) $(3+i, 1+i) \notin [\{(1+i, 2), (1-i, i)\}] \subseteq \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

DZ 2.12. Vrijede li jednakosti:

a) $[\{(1,3),(2,5)\}] = [\{(5,13),(1,2)\}]$ u $\mathbb{R}^2$,

b) $[\{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, 2\vec{i}-\vec{j}\}] = [\{3\vec{i}+\vec{k}, 3\vec{j}+2\vec{k}\}]$ u $V^3(O)$,

c) $[\{1+t, 2t^2+t+3\}] = [\{t^2+1, t^2+t+1\}]$ u $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

DZ 2.13. Je li

a) $\{1+i, 1-i\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$,

b) $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ sustav izvodnica za $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,

c) $\{(1,2,3),(1,0,1),(1,1,0)\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$?

2.3 Baza i dimenzija

Definicija 2.8. (Konačan) linearno nezavisan sustav izvodnica naziva se **baza**.
Činjenice 2.9.

(h) Svaki konačnodimenzionalan prostor osim $\{0\}$ ima (konačnu) bazu.

(i) Baza nije jedinstvena; primjer: *svaka* dva nekolinearna vektora u $V^2(O)$ čine bazu.

(j) Sve baze za V su jednakobrojne. Taj broj nazivamo **dimenzija prostora** V, oznaka: $\dim V$.

(k) Ako je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V, onda svaki vektor $v \in V$ ima jedinstven prikaz u obliku $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$.

(l) Svaki konačan sustav izvodnica za V može se reducirati do baze.

(m) Svaki linearno nezavisan skup u V može se nadopuniti do baze (Primjer: dva nekolinearna vektora u $V^3(O)$).

(n) Neka je $n = \dim V$.

Linearno nezavisni skupovi u V imaju $\leq n$ elemenata. Linearno nezavisan skup od n elemenata je nužno baza.

Sustavi izvodnica za V imaju $\geq n$ elemenata. Sustav izvodnica od n elemenata je nužno baza.

Na predavanjima:

(a) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je baza za $\mathbb{R}^n$, također i za $\mathbb{C}^n$, $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$.

(b) $\{1, t, \ldots, t^n\}$ je baza za $\mathcal{P}_n$, $\dim \mathcal{P}_n = n+1$.

(c) $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ je baza za M_{mn}, pri čemu je E_{ij} matrica koja na mjestu (i,j) ima 1, a sve ostalo su 0. Zato je $\dim M_{mn} = mn$.

Zadatak 2.20. Provjerite da je skup $S = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,-1,0)\}$ baza za $\mathbb{R}^3$, te u njoj prikažite proizvoljni $v \in \mathbb{R}^3$.

RJEŠENJE Da bismo pokazali da je dani skup baza, trebamo pokazati da je linearno nezavisan te da je skup izvodnica.

Međutim, s obzirom da skup S sadrži točno 3 elementa, a $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, dovoljno je pokazati da je to sustav izvodnica.

Neka je $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljan vektor.

Tražimo skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takve da je $v = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,-1,0)$, tj.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= x_1 \\ \alpha + \beta - \gamma &= x_2 \\ \alpha &= x_3. \end{aligned}$$

Slijedi da je $\alpha = x_3$, $\beta = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3$, $\gamma = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$, tj.

$$v = x_3(1,1,1) + \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)(1,1,0) + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)(1,-1,0),$$

pa je skup S sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$.

Slijedi da je S baza za $\mathbb{R}^3$.

ZADATAK 2.21. Neka je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ jedna baza vektorskog prostora $V^3(O)$.

(a) Za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ će i skup

$$B = \{\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}, \lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, (\lambda^2 - \lambda)\vec{a} + (\lambda - 1)\vec{b} + (\lambda^2 - 1)\vec{c}\}$$

biti baza za $V^3(O)$?

(b) Postoji li $\eta \in \mathbb{R}$ takav da su vektori $\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}$, $\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ i $\vec{a} + \eta\vec{c}$ komplanarni za sve vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$? Ako postoji, dovoljno je pronaći jedan takav η.

Sve tvrdnje detaljno obrazložite.

RJEŠENJE

(a) S obzirom da skup B sadrži tri elementa, a $\dim V^3(O) = 3$, dovoljno je pronaći $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje će B biti linearno nezavisan skup.

Neka je:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}) + \beta(\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \gamma((\lambda^2 - \lambda)\vec{a} + (\lambda - 1)\vec{b} + (\lambda^2 - 1)\vec{c}) = \vec{0}.$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda\beta + (\lambda^2 - \lambda)\gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + (\lambda - 1)\gamma &= 0 \\ \lambda\alpha + \beta + (\lambda^2 - 1)\gamma &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda\beta + (\lambda^2 - \lambda)\gamma &= 0 \\ (1 - \lambda)\beta + (\lambda - 1)(1 - \lambda)\gamma &= 0 \\ (\lambda - 1)\lambda\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Sada razlikujemo slučajeve $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$ u kojima sustav ima beskonačno mnogo rješenja te slučaj $\lambda \neq 0, 1$, u kojem sustav ima samo trivijalno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dakle, skup B je baza za $V^3(O)$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(b) Tražimo $\eta \in \mathbb{R}$ takav da su dani vektori linearno zavisni za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ u $V^3(O)$(jer su 3 linearno zavisna vektora nužno komplanarni u $V^3(O)$).

Neka je $\alpha(\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}) + \beta(\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \gamma(\vec{a} + \eta\vec{c}) = 0$.

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \beta\lambda + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha\lambda + \beta + \gamma\eta &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta\lambda + \gamma &= 0 \\ \beta(1 - \lambda) - \gamma &= 0 \\ \gamma(\eta + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, npr. za $\eta = -1$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja, pa su dani vektori komplanarni. □

ZADATAK 2.22. Nadopunite skup $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ do baze od M_2. Je li to nadopunjenje jedinstveno?

RJEŠENJE Lako vidimo da su dvije matrice iz skupa S linearno nezavisne.
Dakle, nedostaju nam još dvije matrice do baze za M_2, jer je $\dim M_2 = 4$.
Dovoljno je pronaći još točno dvije matrice koji će s postojećim matricama skupa S biti linearno nezavisne.
U tu svrhu, možemo uzeti matrice E_{11}, E_{12}, E_{21} i E_{22} iz kanonske baze za M_2 te dopuniti skup S nekima od njih pazeći na linearnu nezavisnost.
Konkretno, krenemo od matrice E_{11} te provjerimo je li linearno nezavisna s matricama iz S:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobijemo $\alpha = -1, \beta = 2$, pa su matrice linearno zavisne.
Slično se dobije i za E_{12} koja je također s njima linearno zavisna.
Za E_{21} dobijemo[1]

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \\ 0 + 0 &= 1 \\ 0 + 0 &= 0, \end{aligned}$$

[1] Uočimo, zapravo ne moramo ni provjeravati dalje za E_{21} i E_{22} jer bi u slučaju da je npr. E_{21} linearno zavisna s matricama u S slijedilo da je $[S] \supseteq \{E_{11}, E_{12}, E_{21}\}$ te $\dim S \geq 3$, no znamo da je $\dim S = 2$.

koji nema rješenja, pa je E_{21} linearno nezavisna s matricama iz S. Nadopunimo S novom matricom E_{21},

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Na kraju, za E_{22} dobijemo sustav:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 0 &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + \gamma &= 0 \\ 0 + 0 + 0 &= 1, \end{aligned}$$

koji nema rješenja.
Slijedi da je

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

baza za M_2.

Zadatak 2.23. Neka je $n \in \mathbb{N}$. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ svih polinoma stupnja najviše n definiramo polinome

$$p_k(t) = (2t + 5)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Provjerite je li skup $\{p_0, \ldots, p_n\}$ baza za $\mathcal{P}_n$.

Rješenje Dokazujemo linearnu nezavisnost. To je dovoljno jer se radi o skupu koji ima $n + 1 = \dim \mathcal{P}_n$ elemenata. Uočimo da je p_k polinom stupnja k za sve $k = 0, \ldots, n$. Promatramo uređeni skup $\{p_0, \ldots, p_n\}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da taj skup nije linearno nezavisan. Slijedi da se neki od njegovih elemenata može zapisati kao linearna kombinacija svojih prethodnika, npr.

$$p_k = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_{k-1} p_{k-1}.$$

Međutim, polinomi $\alpha_0 p_0, \alpha_1 p_1, \ldots \alpha_{k-1} p_{k-1}$ su stupnja strogo manjeg od k, pa je i njihova suma takav polinom, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Zadatak 2.24. Neka je $n \in \mathbb{N}$. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ svih polinoma stupnja najviše $2n$ definiramo polinome

$$p_k(t) = (t^2 + t + 5)^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dokažite da je skup $\{p_1, \ldots, p_n\}$ linearno nezavisan, te ga nadopunite do baze za $\mathcal{P}_{2n}$.

Rješenje Uočimo,

$$p_k(t) = t^{2k} + q_k(t),$$

gdje je q_k polinom stupnja strogo manjeg od $2k$.

Dakle, p_k je polinom stupnja $2k$, pa se linearna nezavisnost skupa $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ dokaže sasvim analogno dokazu prethodnog zadatka.

Vektorski prostor $\mathcal{P}_{2n}$ je dimenzije $2n+1$, pa nam nedostaje još $n+1$ polinom za bazu.

Kanonska baza za $\mathcal{P}_{2n}$ je $1t, t^2, \dots t^{2n}$, pa tvrdimo da je skup

$$B = \{1, t, p_1, t^3, p_2, \dots, t^{2n-1}, p_n\}$$

također baza za $\mathcal{P}_{2n}$.

Uistinu, promotrimo opet skup B kao uređeni skup te uočimo da se opet nijedan element ne može zapisati preko svojih prethodnika jer su oni strogo manjeg stupnja.
Dakle, B je linearno nezavisan skup te je i baza. □

Zadatak 2.25. Skup $S = \{(1,2),(2,1)\}$ nadopunite do baze za $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.
Rješenje Uočimo, skup S je linearno nezavisan i sadrži dva elementa, pa nam nedostaju još dva elementa do baze.

Kanonska baza za $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ je
$$\{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\},$$
pa opet možemo ubacivati njezine elemente u skup S pazeći na linearnu nezavisnost.

Vidimo da je $(1,0) = -\frac{1}{3}(1,2) + \frac{2}{3}(2,1)$, pa je taj vektor linearno zavisan s vektorima iz S.

Također, $(0,1) = \frac{2}{3}(1,2) - \frac{1}{3}(2,1)$, pa je i taj vektor linearno zavisan s vektorima iz S.

Odmah možemo zaključiti da je nova baza $\{(1,2),(2,1),(i,0),(0,i)\}$ □

Zadatak 2.26. Može li se skup

$$S = \{1, t, t^2, t^3, 2+3t+4t^2+5t^3\}$$

reducirati do baze za $\mathcal{P}_3$? Ako da, nađite sve mogućnosti.
Rješenje Budući da je kanonska baza $\{1, t, t^2, t^3\}$ cijela sadržana u S, slijedi da je S (konačan) sustav izvodnica, pa se može reducirati do baze za $\mathcal{P}_3$.
Dimenzija prostora $\mathcal{P}_3$ je 4, a skup S sadrži 5 polinoma, pa jedan treba izbaciti.
Zanima nas za koji od polinoma iz skupa S vrijedi da ga možemo dobiti kao linearnu kombinaciju preostala četiri polinoma iz S. Lako se vidi da taj zahtjev vrijedi za svaki element iz S, pa su mogućnosti za bazu:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{t, t^2, t^3, 2+3t+4t^2+5t^3\},\\
S_2 &= \{1, t^2, t^3, 2+3t+4t^2+5t^3\},\\
S_3 &= \{1, t, t^3, 2+3t+4t^2+5t^3\},\\
S_4 &= \{1, t, t^2, 2+3t+4t^2+5t^3\},\\
S_5 &= \{1, t, t^2, t^3\}.
\end{aligned}$$

□

Domaća zadaća

DZ 2.14. Provjerite da je $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ baza za $\mathbb{R}^4$ i prikažite u njoj proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^4$.

DZ 2.15. Nađite jednu bazu i dimenziju za $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

DZ 2.16. Nađite bazu i dimenziju za A, prostor aritmetičkih nizova.

DZ 2.17. Neka je $\{a, b\}$ baza za V (dakle, $\dim V = 2$). Uz koji uvjet na $c \in V$ će i skup $\{a, c\}$ biti baza za V?

DZ 2.18. Isto pitanje kao prethodno za bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ i skup $\{b_1, \ldots, b_{n-1}, c\}$.

DZ 2.19. Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za V i definirajmo $b_{n+1} = -b_1 - b_2 - \ldots - b_n$. Dokažite da se svaki vektor $v \in V$ može, i to na jedinstven način, prikazati u obliku $v = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i b_i$, pri čemu je $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$.

DZ 2.20. Skup $\{(1, 1, 0)\}$ nadopuniti do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

Rješenje Gledamo $\{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (dodali smo kanonsku bazu početnom skupu). Jedna nadopuna je $\{a, e_1, e_3\}$. Uočimo nejedinstvenost: drugo moguće rješenje je $\{a, e_2, e_3\}$.

DZ 2.21. Nadopunite $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, -1)\}$ do baze za $\mathbb{R}^4$.

2.4 Potprostori

DEFINICIJA 2.10. Neka je $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. M je **potprostor** od V, oznaka $M \leq V$, ako je M i sam vektorski prostor s naslijeđenim operacijama.

ČINJENICE 2.11. (a) Trivijalni potprostori su $\{0\}$ i V. Uvijek je za $M \leq V$, $\dim M \leq \dim V$.

(b) $M \leq V$, $\dim M = \dim V \Leftrightarrow M = V$.

(c) Za $M \subseteq V$ vrijedi $M \leq V$ ako i samo ako je $\alpha x + \beta y \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall x, y \in M$, ako i samo ako $x + y \in M$, $\forall x, y \in M$ i $\alpha x \in M$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$.

(d) Uvijek je $0 \in M$.

(e) $M_1, M_2 \leq V \Rightarrow M_1 \cap M_2 \leq V$.

(f) Presjek bilo koje množine potprostora od V je opet potprostor od V.

(g) Za svaki $S \subseteq V$ vrijedi $[S] \leq V$, te jednakost $[S] = \bigcap_{S \subseteq M \leq V} M$.

ZADATAK 2.27. Provjerite da je $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^3$, te mu nađite bazu i dimenziju.

RJEŠENJE Pokažimo prvo da je $M \leq \mathbb{R}^3$ koristeći karakterizaciju iz 2.11 (c). Očito je $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Neka su sada $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in M$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada za linearnu kombinaciju

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$$

vrijedi

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 - x_2 + x_3) + \beta(y_1 - y_2 + y_3) = 0,$$

pa zaključujemo da je $\alpha x + \beta y \in M$. Kako su $x, y \in M$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bili proizvoljni, slijedi da je $M \leq \mathbb{R}^3$. Odredimo sada jednu bazu i dimenziju. Imamo

$$x \in M \implies x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0) + (0, x_3, x_3) = x_1(1, 1, 0) + x_3(0, 1, 1).$$

Vektori $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ očito pripadaju M, razapinju ga i nezavisni su. Dakle, $\dim M = 2$. □

ZADATAK 2.28. Koji od navedenih skupova su potprostori od $\mathbb{R}^n$? Za one koji jesu nađite po jednu bazu i dimenziju.

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}, \forall i\}$$
$$B = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = 2x_2\}$$
$$C = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$$
$$D = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0\right\}$$
$$E = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$$
$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_{2i} = 0, \forall i\}$$
$$G = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_2 = x_4 = \ldots = x_{2i} = \ldots\}$$

RJEŠENJE Skupovi A i E nisu potprostori od $\mathbb{R}^n$. Naime, A nije zatvoren na množenje skalarom (imamo $e_1 \in A$, ali $\frac{1}{2}e_1 \notin A$), dok E ne sadrži nulvektor. Pokažimo da su preostali skupovi potprostori od $\mathbb{R}^n$. Očito je svaki od njih podskup od $\mathbb{R}^n$. Imamo redom:

B: Ukoliko su $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in B$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni, tada imamo

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = 2(\alpha x_2 + \beta y_2),$$

pa vidimo da i linearna kombinacija $\alpha x + \beta y$ pripada B. Stoga je ponovno prema karakterizaciji 2.11 (c) $B \leq \mathbb{R}^n$. Jedna baza je onda dana s

$$B_B = \{2e_1 + e_2, e_3, \ldots, e_n\},$$

te je $\dim B = n - 1$.

C: Ukoliko su $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in C$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni, tada imamo

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i = 0,$$

pa vidimo da je $\alpha x + \beta y \in C$, te je stoga $C \leq \mathbb{R}^n$. Jedna baza je onda dana s

$$B_C = \{e_i - e_n \,:\, i = 1, \ldots, e_{n-1}\},$$

te je $\dim C = n - 1$.

D: Primijetimo kako je zapravo

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i = 0, \text{ za svaki } i = 1, \ldots, n \iff x = 0.$$

Stoga je $D = \{0\} \leq \mathbb{R}^n$. Po definiciji, nulprostor nema bazu, te je $\dim D = 0$.

F: Ukoliko su $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in F$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni, tada za svaki parni broj $2i$ imamo na odgovarajućoj koordinati

$$\alpha x_{2i} + \beta y_{2i} = 0,$$

pa vidimo da je $\alpha x + \beta y \in F$, te je stoga $F \leq \mathbb{R}^n$. Neka je $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Tada je za svaki $x \in F$

$$x = (x_1, 0, x_3, 0, \ldots) = \sum_{j=1}^{k} x_{2j-1} e_{2j-1},$$

odakle vidimo da je jedna baza za F dana s

$$B_F = \{e_j \,:\, j = 1, \ldots, k\},$$

te je $\dim F = k$.

G: Ukoliko su $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in G$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni, tada imamo

$$\alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha x_4 + \beta y_4 = \cdots = \alpha x_{2i} + \beta y_{2i} = \dots,$$

pa vidimo da je $\alpha x + \beta y \in G$, te je stoga $G \leq \mathbb{R}^n$. Slično kao za F dobijemo da je

$$\dim G = \dim F + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1,$$

te da je jedna baza za G dana s

$$B_G = \{e_j \,:\, j = 1, \dots, k\} \cup \left\{ \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} e_{2j} \right\}$$

Zadatak 2.29. Je li $M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 - 2\overline{z_2} = 0\}$ potprostor od $\mathbb{C}^2$? A od $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$?
Rješenje Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M$. Sada je $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \in M$ ako i samo ako je

$$\alpha x_1 + \beta y_1 - 2\overline{\alpha x_2 + \beta y_2} = \alpha x_1 - 2\overline{\alpha x_2} + \beta y_1 - 2\overline{\beta}\overline{y_2} = 0,$$

a to općenito ne vrijedi. Konkretno, nije problem u zbrajanju, već u množenju skalarom. Na primjer, $x = (2 + 2i, 1 - i) \in M$, ali $i \cdot x = (-2 + 2i, 1 + i) \notin M$.
Sada primijetimo da gornji račun pokazuje da sve štima ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dakle, $M \leq \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. Još vrijedi

$$v = (z_1, z_2) \in M \quad \Leftrightarrow \quad v = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2),\ 2(x_2 - iy_2) = x_1 + iy_1,$$

tj. $2x_2 = x_1$, $-2y_2 = y_1$, a to vrijedi ako i samo ako je

$$v = \left(x_1 + iy_1, \frac{1}{2}x_1 - i\frac{1}{2}y_1\right) = x_1 \left(1, \frac{1}{2}\right) + y_1 \left(i, -\frac{i}{2}\right).$$

□

Zadatak 2.30. Dokažite da je $M = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) = p(-1)\}$ potprostor od $\mathcal{P}_4$, te mu odredite (neku) bazu i dimenziju?
Rješenje Očito je $M \subseteq \mathcal{P}_4$. Neka su sada $p, q \in M$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je $\alpha p + \beta q \in \mathcal{P}_4$, te imamo

$$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = \alpha p(-1) + \beta q(-1) = (\alpha p + \beta q)(-1),$$

pa vidimo da je i $\alpha p + \beta q \in M$. Stoga je $M \leq \mathcal{P}_4$. Odredimo sada jednu bazu. Neka je $p \in M$, te ga zapišimo u obliku

$$p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e \qquad \text{za neke } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

Iz $p(1) = p(-1)$ slijedi

$$a + b + d + c + e = a - b + c - d + e,$$

odnosno $d = -b$. Stoga vidimo da se proizvoljni $p \in M$ može zapisati u obliku

$$p(t) = at^4 + b(t^3 - t) + ct^2 + e.$$

Dakle, skup $\{1, t^2, t^3 - t, t^4\}$ je sadržan u M, te je iz prethodnog sustav izvodnica za M. Kako su svi polinomi u tom skupu različitog stupnja, on je i linearno nezavisan, pa je to ujedno i jedna baza za M. Dimenzija je tada jednaka 4. □

Zadatak 2.31. Neka je V realni ili kompleksni vektorski prostor dimenzije 3. Dokažite da V sadrži beskonačno mnogo potprostora dimenzije 2.

Rješenje Neka je $\{b_1, b_2, b_3\}$ jedna baza za V. Definiramo za $n \in \mathbb{N}$ potprostore M_n s

$$M_n := [\{b_1, b_2 + nb_3\}].$$

Tvrdnja zadatka će biti dokazana ukoliko pokažemo da su M_n međusobno različiti potprostori dimenzije 2. Za početak, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je navedeni generator zaista i baza jer iz

$$b_2 + nb_3 = \lambda b_1$$

slijedi linearna zavisnost elemenata baze, što je kontradikcija. Dakle, zaista je $\dim M_n = 2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, da bi pokazali da je $M_n \neq M_m$ za $m \neq n$, dovoljno je pokazati da je u tom slučaju

$$b_2 + nb_3 \notin M_m = [\{b_1, b_2 + mb_3\}].$$

U suprotnom bi postojali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$b_2 + nb_3 = \alpha b_1 + \beta(b_2 + mb_3),$$

pa bi slijedilo posebno usporedbom koeficijenata uz b_2 i b_3 i

$$\begin{aligned} \beta &= 1 \\ n &= \beta m, \end{aligned}$$

odnosno $m = n$, što je kontradikcija. Dakle, M_n su međusobno različiti potprostori dimenzije 2, pa kako ih ima beskonačno, tvrdnja je dokazana.

DZ 2.22. Neka je V realni ili kompleksni vektorski prostor dimenzije $n \geq 2$. Dokažite da za svaki $1 \leq k \leq n-1$ postoji beskonačno potprostora od V dimenzije k.

Zadatak 2.32. $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \ldots = x_{n-1} - x_n = x_n - x_1\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokažite da je $M \leq \mathbb{R}^n$, nađite mu neku bazu i nadopunite je do baze za $\mathbb{R}^n$.

Rješenje Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ proizvoljan. Označimo s $d := x_1 - x_2$. Tada iz uvjeta na vektore u M imamo sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= d \\ x_2 - x_3 &= d \\ &\vdots \\ x_{n-1} - x_n &= d \\ x_n - x_1 &= d. \end{aligned}$$

Sumiranjem svih jednakosti slijedi $0 = nd$, odakle pak slijedi $d = 0$. Stoga vidimo kako je

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in M \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n \iff x \in [\{(1, 1, \ldots, 1)\}],$$

pa zaključujemo da je $M = [\{(1, 1, \ldots, 1)\}] \leq \mathbb{R}^n$, te je time i dobivena jedna baza za M. Jedna dopuna do baze za $\mathbb{R}^n$ je dana s $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Lako je provjeriti da je zaista $\left\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \sum_{j=1}^n e_j\right\}$ zaista linearno nezavisan skup; prvih $n-1$ vektora je podskup kanonske baze, pa čine linearno nezavisan skup, dok se posljednji ne može prikazati kao linearna kombinacija prethodnih zbog nedostatka netrivijalnog broja na posljednjim koordinatama vektora $e_1, \ldots, e_{n-1}$.

DEFINICIJA 2.12. Za matricu $A \in M_n$, $A = (a_{ij})$ definiramo **transponiranu matricu** $A^T = (b_{ij})$ formulom $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

ZADATAK 2.33. Neka je $S = \{A \in M_n : A^T = A\}$ i $L = \{A \in M_n : A^T = -A\}$. Provjerite da su to potprostori od M_n i nađite im po jednu bazu i dimenziju.

RJEŠENJE Pokažimo najprije da vrijedi $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $A, B \in M_n$. Naime, matrice s obje strane jednakosti su istog tipa, pa je potrebno još samo provjeriti da se elementi na odgovarajućim mjestima podudaraju. Koristit ćemo sljedeću oznaku: za matricu $C \in M_n$ neka je $[C]_{ij}$ element na mjestu ij matrice C. Sada za proizvoljne $1 \leq i, j \leq n$ imamo

$$[(\alpha A + \beta B)^T]_{ij} = [\alpha A + \beta B]_{ji} = \alpha [A]_{ji} + \beta [B]_{ji} = \alpha [A^T]_{ij} + \beta [B^T]_{ij} = [\alpha A^T + \beta B^T]_{ij},$$

čime je tvrdnja pokazana.
Pokažimo sada da je $S \leq M_n$. Neka su $A, B \in S$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha A + \beta B,$$

pa vidimo da je $\alpha A + \beta B \in S$. Stoga je $S \leq M_n$. Analogno se pokaže i da je $L \leq M_n$.
Odredimo sada bazu za S. Neka je $A = (a_{ij}) \in S$ proizvoljna. Tada iz $A = A^T$ imamo posebno i

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{za sve } i \neq j,$$

pa A možemo zapisati u sljedećem obliku

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}).$$

Slijedi da je skup

$$\{E_{ii} \,:\, i = 1, \dots, n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \,:\, 1 \leq i < j \leq n\}$$

sustav izvodnica za S, a ponovno je lako uvjeriti se da je linearno nezavisan (sve matrice iz ovog skupa imaju netrivijalne elemente na različitim mjestima). Stoga je $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$.
Odredimo sada bazu za L. Neka je $A = (a_{ij}) \in L$ proizvoljna. Tada iz $A^T = -A$ imamo

$$\begin{aligned} a_{ii} &= -a_{ii} \quad \text{za sve } i = 1, \dots, n \\ a_{ij} &= -a_{ji} \quad \text{za sve } i \neq j, \end{aligned}$$

pa vidimo dodatno i da su dijagonalni elementi jednaki 0. Stoga se A može zapisati u obliku

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} - E_{ji}),$$

pa je skup

$$\{E_{ij} + E_{ji} \,:\, 1 \leq i < j \leq n\}$$

jedna baza za L. Konačno je $\dim L = \frac{n(n-1)}{2}$. □

ZADATAK 2.34. Neka je $M \leq V$, $M \neq \{0\}, V$. Pokažite da postoji baza za V čiji niti jedan član ne leži u M. Uputa: pokušajte zamisliti/konstruirati bazu za $V^3(O)$ čiji niti jedan član ne leži u xy–ravnini.

RJEŠENJE Neka je $\{a_1, \dots, a_k\}$ jedna baza za M, pri čemu je $1 \leq k < n = \dim V$. Nadopunimo je do baze $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ za V i gledamo skup $\{a_1 + a_n, \dots a_k + a_n, a_{k+1}, \dots, a_n\}$. Lako se vidi da je nezavisan i kako sadrži točno n elemenata, on je baza za V.
Uočimo da nijedan od vektora $a_{k+1}, \dots, a_n$ ne leži u M (jer bi tada skup $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ bio zavisan). Također, nijedan od vektora $a_1 + a_n, \dots, a_k + a_n$ ne leži u M.
Pouka zadatka je da ne možemo *a priori* računati na to da će baza za V u sebi sadržavati bazu za M. No, to možemo postići ako krenemo od baze za M pa je nadopunimo do baze za V. □

Domaća zadaća

DZ 2.23. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$.

DZ 2.24. U $\mathbb{R}^4$ su dani vektori $a_1 = (1, 1, 2, 2)$, $b_1 = (1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $b_2 = (0, 1, 2, 1)$. Neka je $M_1 = [\{a_1, b_1\}]$, $M_2 = [\{a_2, b_2\}]$. Dokažite da je $M_1 = M_2$.

RJEŠENJE Jasno je da zapravo imamo baze za M_1, M_2. Zato je $\dim M_1 = \dim M_2 = 2$ pa je dovoljno vidjeti da je $M_1 \subseteq M_2$ (ili $M_2 \subseteq M_1$). Dovoljno je, dalje, vidjeti $a_2, b_2 \in M_1$ jer M_1 kao vektorski prostor tada mora sadržavati i sve njihove linearne kombinacije. Sada se računa $a_2 = a_1 + b_1$, $b_2 = a_1 - b_1$.

DZ 2.25. Neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$. Koje uvjete moraju zadovoljavati ovi brojevi da bi skup $M = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \beta\}$ bio potprostor?

DZ 2.26. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - 2x_2 - x_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4$. Baza i dimenzija?

DZ 2.27. Neka su L, U, D redom skupovi svih donjetrokutastih/gornjetrokutastih/dijagonalnih matrica u M_n. Dokažite da su to potprostori od M_n, te im nađite po jednu bazu i odredite dimenzije. (Predavanja, knjiga!)

DZ 2.28. Dokažite da su $X = \{A \in M_n : A^T = A\}$ i $Y = \{A \in M_n : A^T = -A\}$ potprostori od M_n, nađite im po jednu bazu i dimenziju.

DZ 2.29. $M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(5) = 0\} \leq \mathcal{P}_3$. Baza i dimenzija?

2.5 Suma i presjek potprostora

DEFINICIJA 2.13. Za $L, M \leq V$ definira se **suma potprostora** L i M kao $L + M = [L \cup M]$. Kažemo da je suma **direktna** ako je $L \cap M = \{0\}$ i tada pišemo $L \dot{+} M$.

ČINJENICE 2.14.

(a) $L + M = \{a + b : a \in L, b \in M\}$. Rastav $x = a + b$ svih vektora $x \in L + M$ je jedinstven ako i samo ako je suma direktna.

(b) $\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim L \cap M$.

(c) Ako je $L \cap M = \{0\}$, te ako imamo baze $\{a_1, \dots, a_m\}$ i $\{b_1, \dots, b_l\}$ za M i L, onda je $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_l\}$ baza za V. (Objasniti kratko!)

ZADATAK 2.35. Neka su U i L redom prostor svih gornjotrokutastih i prostor svih donjotrokutastih matrica u M_n. Dokazati da je $U + L = M_n$, te da suma nije direktna.

RJEŠENJE Neka je $A = (a_{ij}) \in M_n$ proizvoljna. Definiramo gornjotrokutastu matricu $U_A \in M_n$ i donjotrokutastu $L_A \in M_n$ s

$$[U_A]_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \leq j \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \qquad [L_A]_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Tada je $A = U_A + L_A$, pa vidimo da se svaka matrica može prikazati kao zbroje jedne gornjotrokutaste i jedne donjotrokutaste. Stoga je $M_n = U + L$. Primijetimo da suma nije direktna zbog netrivijalnog presjeka $U \cap L$; u njemu se nalaze sve dijagonalne matrice. □

ZADATAK 2.36. Neka su S i L redom prostor svih simetričnih i prostor svih antisimetričnih matrica u M_n. Dokazati da je $S \dot{+} L = M_n$.

RJEŠENJE Odredimo prvo presjek $S \cap L$. Ako je $A \in S \cap L$, tada slijedi $A = A^T = -A$, odnosno $A = 0$. Stoga je $S \cap L = \{0\}$, pa je suma direktna. Preostaje pokazati da je $S + L = M_n$. Zbog direktnosti sume je dovoljno pokazati da je $\dim S + \dim L = \dim M_n$. Naime, iz 2.14 (b) bi tada slijedilo

$$\dim(S + L) = \dim S + \dim L = \dim M_n,$$

pa zbog 2.11 (b) bi konačno imali i $S + L = M_n$. Međutim, ove dimenzije smo već ranije izračunali: one su redom $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$ te $\dim L = \frac{n(n-1)}{2}$, pa je zaista $\dim S + \dim L = n^2$. □

Posljedica prethodnog zadatka: svaka kvadratna matrica se na jedinstven način može prikazati kao zbroj jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice. Kako?

ZADATAK 2.37. Neka je $\mathcal{P}_3$ prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3, te neka su

$$M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\}, \quad L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 0\}$$

njegovi potprostori. Odredite po jednu bazu za M, L, $M \cap L$ i $M + L$.

RJEŠENJE Vidimo da je $p \in M$ ako i samo ako je oblika

$$p(t) = (t-1)(at^2 + bt + c) \qquad \text{za neke } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Stoga je jedna baza za M dana s

$$B_M = \{t^2(t-1), t(t-1), (t-1)\}.$$

Analogno vidimo da je jedna baza za L dana s

$$B_L = \{t^2(t-2), t(t-2), (t-2)\}.$$

Nadalje, presjek $M \cap L$ je dan s

$$M \cap L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(2) = 0\},$$

pa vidimo da je

$$p \in M \cap L \iff p(t) = (t-1)(t-2)(at+b) \qquad \text{za neke } a, b \in \mathbb{R}.$$

Stoga je jedna baza za $M \cap L$ dana s

$$B_{M\cap L} = \{t(t-1)(t-2), (t-1)(t-2)\}.$$

Kako je $\dim M = \dim L = 3$ te $\dim(L \cap M) = 2$, slijedi da je $\dim(M + L) = 3 + 3 - 2 = 4 = \dim \mathcal{P}_3$, pa zaključujemo $M + L = \mathcal{P}_3$. $\square$

Pretpostavimo da su nam poznate baze potprostora i da trebamo odrediti bazu za njihovu sumu i njihov presjek.
Bazu za sumu potprostora određujemo tako da uniju baza potprostora (što je skup izvodnica za sumu) reduciramo do linearno nezavisnog skupa, te time dobijemo bazu sume.
Kako nalazimo bazu presjeka potprostora? (Ovaj postupak će ujedno dati i bazu za sumu potprostora.)
Neka su dani potprostori M i L od V, neka su dane baze $\{a_1, \ldots, a_m\}$ i $\{b_1, \ldots, b_l\}$ za M i L, dakle $\dim M = m$, $\dim L = l$. Skup $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_l\}$ je očito skup izvodnica za $M + L$.

- Ako je linearno nezavisan, onda je i baza za $M+L$ pa je $\dim(M+L) = m+l = \dim M + \dim L$ pa slijedi da je $\dim M \cap L = 0$, tj. $M \cap L = \{0\}$.

- Ako je zavisan (uočimo $a_1 \neq 0$), nađimo vektor koji je linearna kombinacija prethodnika; to nije nijedan od a–ova, dakle to je neki b_i. Izbacimo ga van i ono što je ostalo još uvijek je skup izvodnica za $L + M$. Postupak nastavimo.

  Recimo da smo proveli takvih k koraka dok na kraju nismo dobili nezavisan skup, time i bazu za $L + M$. Očito je $k \leq l$. Ako je $k = l$, svi b–ovi su izbačeni i slijedi da je $M + L = M$, tj. $L \leq M$ i zato $L \cap M = L$.

  Ostaje razmotriti slučaj $k < l$. Nije smanjenje općenitosti ako pretpostavimo da su izbačeni $b_1, \ldots, b_k$. Dakle, $\{a_1, \ldots, a_m, b_{k+1}, \ldots, b_l\}$ je baza za $M+L$. Sad svaki od $b_1, \ldots, b_k$ kao element od $L \subseteq M + L$ dopušta rastav u toj bazi u obliku

$$b_r = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,r} a_i + \sum_{j=k+1}^{l} \beta_{j,r} b_j =: e_r + f_r, \quad r = 1, \ldots, k.$$

  Pogledajmo vektore $e_1, \ldots, e_k$. Očito su u $M \cap L$, tvrdimo da zapravo čine bazu za $M \cap L$. To vrijedi jer je $\dim M \cap L = \dim M + \dim L - \dim(M + L) = m + l - (m + l - k) = k$ pa vidimo da samo treba dokazati njihovu nezavisnost.

$$\sum_{r=1}^{k} \gamma_r e_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{k} \gamma_r (b_r - f_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_k b_k + \bullet \cdot b_{k+1} + \bullet \cdot b_{k+2} + \ldots + \bullet \cdot b_l = 0.$$

  Slijedi da su svi koeficijenti 0, posebno $\gamma_1 = \ldots = \gamma_k = 0$.

Zadatak 2.38 (ilustracija algoritma). Neka su M i L zadani svojim bazama $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$ i $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1)$. Odrediti baze za $M + L$ i $M \cap L$.

Rješenje Skup $\{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ je zavisan jer sadrži 4 vektora u trodimenzionalnom prostoru. Uočimo da je $\{a_1, a_2, b_1\}$ lin nez, zato baza za $M + L$. Sad preostaje b_2 prikazati u toj bazi i uzeti mu M–komponentu.

$$(0, 0, 1) = \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(1, 2, 1) + \beta(1, 0, 0)$$

Dobije se $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = -1$ pa je $1 \cdot (1, 0, 1) + 0 \cdot (1, 2, 1) = (1, 0, 1)$ baza za $M \cap L$.

Zadatak 2.39. Neka su $M = [B_M]$ i $N = [B_N]$ potprostori od $\mathbb{R}^4$ zadani svojim bazama

$$B_M = \{(1, -1, 0, 2), (3, -1, -3, 1), (2, -1, -1, 2)\},$$

$$B_N = \{(1, 2, -1, -2), (1, -2, -3, 4), (-1, -1, 3, -1)\}.$$

Odredite po jednu bazu za $M + N$ i $M \cap N$.

Rješenje Formiramo skup

$$B_M \cup B_N = \{(1, -1, 0, 2), (3, -1, -3, 1), (2, -1, -1, 2), (1, 2, -1, -2), (1, -2, -3, 4), (-1, -1, 3, -1)\}$$

koji je tada sustav izvodnica za $M + N$. Kako on sadrži šest elemenata, očito je linearno nezavisan, te ga reduciramo do baze za $M + N$. Krećemo od vektora $(1, 2, -1, -2)$ te provjeravamo može li se prikazati kao linearna kombinacija prethodnika. Rješavanjem vektorske jednadžbe

$$(1, 2, -1, -2) = \alpha(1, -1, 0, 2) + \beta(3, -1, -3, 1) + \gamma(2, -1, -1, 2),$$

odnosno pripadnog sustava

$$\begin{array}{rrrcr} \alpha & +3\beta & +2\gamma & = & 1 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & = & 2 \\ & -3\beta & -\gamma & = & -1 \\ 2\alpha & +\beta & +2\gamma & = & -2, \end{array}$$

dobijemo $\alpha = -7$, $\beta = -2$, $\gamma = 7$. Stoga b_1 izbacujemo, ali posebno i vidimo da je već $b_1 \in M \cap N$. Nakon toga vidimo rješavanjem odgovarajućeg sustava da jednadžba

$$(1, -2, -3, 4) = \alpha(1, -1, 0, 2) + \beta(3, -1, -3, 1) + \gamma(2, -1, -1, 2)$$

nema rješenja, pa b_2 ostavljamo. Kako smo time dobili četveročlan linearno nezavisan skup, slijedi da je $M + N = \mathbb{R}^4$, te je za jednu bazu tada najjednostavnije uzeti kanonsku, ali možemo svakako iskoristiti i upravo dobivenu reduciranu bazu

$$B_{M+N} = \{(1, -1, 0, 2), (3, -1, -3, 1), (2, -1, -1, 2), (1, -2, -3, 4)\}.$$

Prikažimo još posljednji vektor u ovoj bazi; ovdje dobijemo

$$(-1, -1, 3, -1) = 9(1, -1, 0, 2) + 3(3, -1, -3, 1) - 9(2, -1, -1, 2) - (1, -2, -3, 4).$$

Stoga je jedna baza za presjek dana s

$$B_{M\cap N} = \{(0, -3, 0, 3), (1, 2, -1, -2)\}.$$

$\square$

Domaća zadaća

DZ 2.30. Zadani su $M, L \leq \mathbb{R}^4$ svojim bazama $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1)$, $a_3 = (1, -1, 1, -1)$, te $b_1 = (1, -1, -1, 1)$, $b_2 = (2, -2, 0, 0)$, $b_3 = (3, -1, 1, 1)$. Nađite baze za $M + L$ i $M \cap L$.

DZ 2.31. Neka su $M, L, K \leq V$. Pokažite da je $(M \cap L) + (M \cap K) \subseteq M \cap (L + K)$. Vrijedi li jednakost?

Rješenje Ako je $x \in (M \cap L) + (M \cap K)$, onda ima oblik $x = a + b$, gdje su $a \in M \cap L$, $b \in M \cap K$. Očito je $a + b \in M$ (jer su oba iz M, a M je potprostor), također je $a + b \in L + K$ (jer je $a \in L$, $b \in K$). Dakle je $a + b \in M \cap (L + K)$.
Jednakost općenito ne vrijedi. Uzmimo u $\mathbb{R}^2$ $M = [(1,1)]$, $L = [(1,0)]$, $K = [(0,1)]$. Sad je $M \cap L = M \cap K = \{0\}$, dok je $M \cap (L + K) = M \cap \mathbb{R}^2 = M$. □

DZ 2.32. Za svaki $a \in \mathbb{R}$ definiran je potprostor vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ (polinoma stupnja ≤ 3) kao

$$M_a = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(a) = 0\}.$$

Odredite neku bazu potprostora $(M_1 \cap M_2) + M_3$.

DZ 2.33. Neka je V vektorski prostor dimenzije n i neka su L i M njegovi potprostori dimenzije $n-1$ takvi da L nije podskup od M i M nije podskup od L. Odredite dimenziju potprostora $L \cap M$.

DZ 2.34. Zadani su potprostori X, Y, Z realnog vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog tri s realnim koeficijentima s

$$X = \left[\left\{x^3 + x^2 + 3x + 2,\ 2x^3 - x^2 + 1,\ x^3 - x^2 - x\right\}\right],$$

$$Y = \left[\left\{(x+1)^3,\ (x+1)^2\right\}\right] \qquad \text{i} \qquad Z = \{p \in \mathcal{P}_3 \,:\, p(x) = -p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Pronađite neku bazu prostora $(X + Y) \cap Z$. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

2.6 Direktni komplement

Definicija 2.15. Neka je $L \leq V$. Ako je $M \leq V$ takav da je $L \dotplus M = V$, kaže se da je M direktni komplement za L (i obratno).

Kako nalazimo direktni komplement netrivijalnog potprostora L od V? Uzmemo bazu $\{b_1, \ldots, b_k\}$ za L, proširimo je do baze $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ za cijeli prostor V i tada je $[\{b_{k+1}, \ldots, b_n\}]$ jedan direktni komplement od L.
Direktni komplement nije jedinstven. Na primjer, u $\mathbb{R}^3$ uzmimo za M xy-ravninu i tada je svaki pravac kroz ishodište koji ne leži u toj ravnini njezin direktni komplement. Zbog nejedinstvenosti direktnog komplementa nije korektna oznaka $V \dot{-} M$.

Zadatak 2.40. Za $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ provjeriti da je potprostor i naći mu neki direktan komplement.

Rješenje Vrijedi da je $x \in M$ ako i samo ako je

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) = x_3(1,1,1,0) + x_4(1,-2,0,1).$$

Dakle je $\{(1,1,1,0), (1,-2,0,1)\}$ jedna baza za M, sad je treba dopuniti do baze za $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \underbrace{(1,1,1,0)}_{=:a}, \underbrace{(1,-2,0,1)}_{=:b}, e_1, e_2, \cancel{e_3}, \cancel{e_4} \right\}.$$

Očito su $\{a, b, e_1\}$ i $\{a, b, e_1, e_2\}$ nezavisni i zato možemo uzeti $L = [\{e_1, e_2\}]$ kao direktni komplement.

Zadatak 2.41. Neka je M prostor svih dijagonalnih matrica reda 3. Odredite po jedan direktni komplement potprostora M u V, ako je

(a) $V = M_3$.

(b) V prostor svih simetričnih matrica reda 3.

(c) V prostor svih gornjotrokutastih matrica reda 3 .

RJEŠENJE Jedna baza za M je dana s $\{E_{ii} : i = 1, 2, 3\}$. U svakom od podzadataka je tada samo potrebno pronaći dopunu do (neke) baze odgovarajućeg prostora. Redom imamo da su primjeri direktnih komplemenata dani s:

(a) $L = [\{E_{ij} : 1 \le i, j \le n, i \neq j\}]$

(b) $L = [\{E_{ij} + E_{ji} : 1 \le i < j \le 3\}]$

(c) $L = [\{E_{ij} : 1 \le i < j \le 3\}]$.

□

ZADATAK 2.42. Neka je $M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\} \le \mathbb{R}^n$.

(a) Dokažite da je $L = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j, \forall i, j\}$ direktni komplement od M u $\mathbb{R}^n$.

(b) Nađite jedinstveni rastav elementa $(1, 2, 3, \ldots, n)$ s obzirom na rastav $\mathbb{R}^n = L \dot{+} M$.

(c) Nađite jedinstveni rastav elementa $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ s obzirom na rastav $\mathbb{R}^n = L \dot{+} M$.

(d) Nađite još neki direktni komplement od M u $\mathbb{R}^n$.

RJEŠENJE

(a) Vrijedi da je $x \in M$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) &= (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_1 - \ldots - x_{n-1}) \\ &x_1(1, 0, \ldots, 0, -1) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0, -1) + \ldots + x_{n-1}(0, 0, \ldots, 1, -1). \end{aligned}$$

Baza za M je $\{(1, 0, \ldots, 0, -1), (0, 1, 0, \ldots, 0, -1), \ldots, (0, 0, \ldots, 1, -1)\}$, $\dim M = n - 1$.

Vrijedi da je $x \in L$ ako i samo ako je

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_1, \ldots, x_1) = x_1(1, 1, \ldots, 1)$$

pa je $\{(1, 1, \ldots, 1)\}$ baza za L, a $\dim L = 1$.

Vrijedi da je L direktan komplement od M ako i samo ako je $L \dot{+} M = \mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $L + M = \mathbb{R}^n$, $L \cap M = \{0\}$.

Gledamo $L \cap M$. Vrijedi da je $x \in L \cap M$ ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ i $\sum x_i = 0$. Dakle, $nx_1 = 0$ pa je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Dobili smo da je $L \cap M = \{0\}$, a kako je $\dim(L + M) = \dim L + \dim M = n - 1 + 1 = n$, onda je $L + M = \mathbb{R}^n$.

(c) Uzmimo bazu za $\mathbb{R}^n$ koja se sastoji od unije baza za M i L dobivenih u (a) dijelu:

$$B = B_M \cup B_L = \left\{ e_1 - e_n, e_2 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n, \sum_{j=1}^n e_j \right\}.$$

Tada je dovoljno pronaći rastav proizvoljnog vektora $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ u ovoj bazi, tj. odrediti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takve da je

$$x = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (e_j - e_n)}_{x_M} + \underbrace{\alpha_n \sum_{j=1}^{n} e_j}_{x_L}.$$

Tada je pripadni rastav dan upravo u obliku $x = x_M + x_L$ kao gore. Izjednačavanjem koeficijenata uz pojedini kanonski vektor dobijemo sustav

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_n &= x_1 \\ \alpha_2 + \alpha_n &= x_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n &= x_{n-1} \\ \alpha_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j &= x_n. \end{aligned}$$

Sumiranjem svih jednakosti u sustavu slijedi

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

pa uvrštavanjem u svaku prethodnu jednadžbu dobijemo i

$$\alpha_j = x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad j = 1, \dots, n-1.$$

Dakle, konačno dobivamo

$$x_M = \sum_{j=1}^{n-1} \left(x_j - \sum_{k=1}^{n} x_k \right) (e_j - e_n), \qquad x_L = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \right) \sum_{j=1}^{n} e_j.$$

(b) Ovo je samo poseban slučaj (c) podzadatka.

(d) Lako se vidi da je $K = [\{e_1\}]$ jedan direktan komplement od M koji je očito različit od L.

Zadatak 2.43. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednakog tri dani su potprostori

$$\begin{aligned} M &= \{p \in \mathcal{P}_3 \ : \ (\forall x \in \mathbb{R})\ p(1-x) = p(x+1)\}, \\ N &= \{p \in \mathcal{P}_3 \ : \ (\forall x \in \mathbb{R})\ p(-x) = -p(x)\}. \end{aligned}$$

Dokažite da je N direktan komplement od M, te odredite rastav proizvoljnog polinoma iz $\mathcal{P}_3$ s obzirom na rastav $\mathcal{P}_3 = M \dot{+} N$.

Rješenje: Neka je $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in M$. Tada je

$$a(1-x)^3 + b(1-x)^2 + c(1-x) + d = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $1, x, x^2, x^3$ dobiva se $a = 0$, $c = -2b$. Dakle,

$$p(x) = b(x^2 - 2x) + d.$$

Ako je $p \in N$, tada

$$b(x^2 + 2x) + d = -b(x^2 - 2x) - d,$$

iz čega slijedi $b = d = 0$, dakle $p = 0$. Stoga smo dokazali da je $M \cap N = \{0\}$. Još treba vidjeti $\mathcal{P}_3 = M \dot{+} N$. Baza za M je $\{x^2 - 2x, 1\}$, dakle $\dim M = 2$. Raspisivanjem uvjeta kojim je N zadan, dobiva se da je $\{x^3, x\}$ baza za N. Sada vidimo da je

$$\dim(M \dot{+} N) = \dim M + \dim N = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{P}_3,$$

pa kako je $M \dot{+} N \leq \mathcal{P}_3$, mora biti $M \dot{+} N = \mathcal{P}_3$. Neka je $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Prikažimo taj polinom u bazi za P_3 koja je dobivena kao unija baza od M i N, npr. $\{x^2 - 2x, 1, x^3, x\}$. Izjednačimo

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha(x^2 - 2x) + \beta + \gamma x^3 + \delta x.$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobiva se $\alpha = b$, $\beta = d$, $\gamma = a$, $\delta = c + 2b$, pa za polinome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \alpha(x^2 - 2x) + \beta = b(x^2 - 2x) + d \\ p_2(x) &= \gamma x^3 + \delta x = ax^3 + (c + 2b)x \end{aligned}$$

vrijedi $p = p_1 + p_2$, $p_1 \in M$, $p_2 \in N$.

Domaća zadaća

DZ 2.35. Za $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ naći bazu i neki direktan komplement u $\mathbb{R}^4$.

DZ 2.36. Za $M = \{(z_1, z_2, z_3) : z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \leq \mathbb{C}^3$ naći bazu, te direktni komplement u (a) $\mathbb{C}^4$ (b) $(\mathbb{C}^4)_{\mathbb{R}}$.

DZ 2.37. Zadani su $M, L \leq \mathbb{R}^4$ svojim bazama $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1)$, $a_3 = (1, -1, 1, -1)$, te $b_1 = (1, -1, -1, 1)$, $b_2 = (2, -2, 0, 0)$, $b_3 = (3, -1, 1, 1)$. Nađite baze za $M + L$ i $M \cap L$.

DZ 2.38. Neka je M prostor svih matrica reda 4 takvih da je $a_{ij} = 0$ za $i \geq j$. . Odredite po jedan direktni komplement potprostora M u V, ako je

(a) $V = M_4$.

(b) V prostor svih gornjotrokutastih matrica reda 4.

(c) V prostor svih matrica reda 4 koje na dijagonali imaju sve nule.

DZ 2.39. Neka su $M, L, K \leq V$. Pokažite da je $(M \cap L) + (M \cap K) \subseteq M \cap (L + K)$. Vrijedi li jednakost?

Rješenje Ako je $x \in (M \cap L) + (M \cap K)$, onda ima oblik $x = a + b$, gdje su $a \in M \cap L$, $b \in M \cap K$. Očito je $a + b \in M$ (jer su oba iz M, a M je potprostor), također je $a + b \in L + K$ (jer je $a \in L$, $b \in K$). Dakle je $a + b \in M \cap (L + K)$.
Jednakost općenito ne vrijedi. Uzmimo u $\mathbb{R}^2$ $M = [(1, 1)]$, $L = [(1, 0)]$, $K = [(0, 1)]$. Sad je $M \cap L = M \cap K = \{0\}$, dok je $M \cap (L + K) = M \cap \mathbb{R}^2 = M$. $\square$

DZ 2.40. Isto u M_n.

DZ 2.41. Neka je $\dim V = n$, neka su $M, L \leq V$, $1 \leq \dim M = \dim L < n$. Dokažite da M i L imaju zajednički direktan komplement.

RJEŠENJE Postupimo kao kod dokaza teorema o dimenziji sume.
Neka je $\{a_1, \ldots, a_k\}$ baza za $M \cap L$. Nadopunimo je do baze za M i L: $B_M = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r\}$, $B_L = \{a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_r\}$. Vrijedi da je $k + r = \dim M = \dim L$.
Sad iz dokaza spomenutog teorema znamo da je $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_r\}$ baza za $M + L$. I ovu bazu nadopunimo do baze cijelog prostora V: $B = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_r, v_1, \ldots, v_s\}$. Uočimo da je $\dim M = \dim L = k + r$, $\dim V = k + r + r + s$ pa traženi komplement ima dimenziju $r + s$.
Tvrdimo da $N = [\{b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_r + c_r, v_1, \ldots, v_s\}]$ ima svojstvo da je $M \dotplus N = V$, $L \dotplus N = V$.
Jasno je da je $M \cap N = \{0\} = L \cap N$. Naime, ako je $x \in M \cap N$, onda je

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i (b_i + c_i) + \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i.$$

Zbog nezavisnosti elemenata baze B slijedi $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\delta_i = 0$, $\forall i$. Dakle, $x = 0$. Analogno se dobije $L \cap N = \{0\}$.
Slično se zaključi da je $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, b_1 + c_1, \ldots, b_r + c_r, v_1, \ldots, v_s\}$ baza za V (nezavisnost dobijemo kao gore, a kardinalitet je pravi). Dakle, dobili smo direktan komplement za M. Argument za L je isti.

2.7 Linearne mnogostrukosti

Neka je V vektorski prostor, $x_0 \in V$ i $M \leq V$. Skup

$$x_0 + M = \{x_0 + m : m \in M\}$$

nazivamo linearna mnogostrukost u V u smjeru potprostora M (s predstavnikom/reprezentantom x_0).
Vrijedi $x_0 + M = y_0 + M \Leftrightarrow x_0 - y_0 \in M$. Posebno $x_0 + M = M \Leftrightarrow x_0 \in M$, odakle slijedi da je svaki element iz linearne mnogostrukosti njezin reprezentant.
Linearne mnogostrukosti u ravnini $\mathbb{R}^2$ su točke (tj. jednočlani skupovi), pravci i $\mathbb{R}^2$.
Linearne mnogostrukosti u prostoru $\mathbb{R}^3$ su točke (tj. jednočlani skupovi), pravci, ravnine i $\mathbb{R}^3$.

ZADATAK 2.44. Je li skup $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$? Ako da, napišite ju u obliku $(x_0, y_0, z_0) + M$, gdje je M potprostor od $\mathbb{R}^3$.

RJEŠENJE Vidimo da se A može zapisati kao

$$\begin{aligned} A = \{(x, y, -x - y + 1) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\} &= \{x\,(1, 0 - 1) + y\,(0, 1, -1) + (0, 0, 1) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= (0, 0, 1) + [\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}], \end{aligned}$$

pa vidimo da je A linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$ u smjeru potprostora $[\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}]$ s reprezentantom $(0, 0, 1)$.
Alternativno, možemo primijetiti da je

$$v \in A \iff v - e_3 \in M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : x + y + z = 0\} \leq \mathbb{R}^3,$$

pa zaključujemo da je $A = e_3 + M$.

ZADATAK 2.45. Je li skup $B = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 1, p(0) = 0\}$ linearna mnogostrukost u $\mathcal{P}_3$? Ako da, napišite ju u obliku $p_0 + M$, gdje je M potprostor od $\mathcal{P}_3$.

RJEŠENJE Označimo s $q \in \mathcal{P}_3$ polinom $q(t) = t$. Primijetimo kako je

$$p \in B \iff p - q \in \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0,\, p(0) = 0\} =: M \leq \mathcal{P}_3,$$

pa zaključujemo da je $B = q + M$. □

ZADATAK 2.46. Je li skup $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$?

RJEŠENJE Pretpostavimo da se C može zapisati u obliku $C = v + M$ za neki $v \in \mathbb{R}^3$ i $M \leq \mathbb{R}^3$. Posebno, razlika proizvoljna dva elementa iz C bi tada morala pripadati potprostoru M. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}
(2, 0, 0) = (1, 0, 0) - (-1, 0, 0,) \in M \\
(0, 2, 0) = (0, 1, 0) - (0, -1, 0) \in M \\
(0, 0, 2) = (0, 0, 1) - (0, 0, -1) \in M.
\end{aligned}$$

Međutim, tada bi imali $M = \mathbb{R}^3$, pa posebno i $C = v + M = \mathbb{R}^3$, što očito ne vrijedi. Dakle, C nije linearna mnogostrukost. □

DZ 2.42. Je li skup $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F} \right\}$ linearna mnogostrukost u $M_2(\mathbb{F})$?

DZ 2.43. Je li skup $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$?

Poglavlje 3

Matrice

DEFINICIJA 3.1. Preslikavanje $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$ zove se **matrica** tipa (m, n) (ili $m \times n$), odnosno realna (kompleksna) matrica s m redaka i n stupaca. Oznaka za skup svih takvih matrica je $M_{mn}(\mathbb{F})$.

Uvodimo sljedeće pojmove i oznake:

1. Tablični zapis $A = (a_{ij}) = [a_{ij}]$.
2. Za skalare $a_{ij} \in \mathbb{F}$ kažemo da su **elementi** matrice A.
3. Uređena n–torka $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ je i–ti **redak** od A.
4. Uređena m–torka $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ je j–ti **stupac** od A.
5. **Nulmatrica** $0 \in M_{mn}(\mathbb{F})$ zadana je s $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$.
6. Matricu tipa $1 \times n$ nazivamo **(jedno)retčanom**.
7. Matricu tipa $m \times 1$ nazivamo **(jedno)stupčanom**.
8. Matricu tipa $n \times n$ nazivamo **kvadratnom**.
9. Uređena n–torka $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ je **glavna dijagonala** od A.
10. Uređena n–torka $(a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1})$ je **sporedna dijagonala** od A.
11. Operacije: zbrajanje matrica iz $M_{mn}(\mathbb{F})$ i množenje matrica iz $M_{mn}(\mathbb{F})$ skalarom iz $\mathbb{F}$. Tada je $M_{mn}(\mathbb{F})$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ dimenzije $m \cdot n$.
12. Ulančane matrice možemo množiti: Ako su $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B = (b_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{F})$, tada je $C = A \cdot B = (c_{ij}) \in M_{mp}(\mathbb{F})$, gdje je
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, p.$$
13. Svojstva množenja:
    (1) $A(B + C) = AB + AC$ (desna distributivnost)
    (2) $(A + B)C = AC + BC$ (lijeva distributivnost)

(3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ (kvaziasocijativnost)

(4) $(AB)C = A(BC)$ (asocijativnost)

14. Množenje nije komutativno, čak ni ako su oba produkta definirana

15. **Jedinična matrica** $I \in M_n(\mathbb{F})$ dana je s $I = (\delta_{ij})$, gdje je $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

16. Za množenje kvadratnih matrica vrijedi

(5) $AI = IA = A, \forall A \in M_n(\mathbb{F})$

pa je $M_n(\mathbb{F})$ **asocijativna algebra s jedinicom**.

Zadatak 3.1. Pomnožite matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Rješenje Produkt AB je definiran i iznosi

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{pmatrix},$$

a produkt BA nije definiran.

Zadatak 3.2 (množenje nije komutativno čak ni kad oba produkta postoje). Izračunajte AB i BA, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Rješenje

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

17. U $M_n(\mathbb{F})$ postoje **djelitelji nule**, npr. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. U $M_n(\mathbb{F})$ definiramo **potenciranje** kao

$$A^0 = I, A^1 = A, \ldots, A^n = A^{n-1}A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 3.3. Vrijedi da je

(a) $A^m A^n = A^{m+n}$,

(b) $(A^m)^n = A^{mn}$,

za sve $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Rješenje Dokazujemo indukcijom po n, uz m fiksan.

$\boxed{n = 1}$ $A^m \cdot A^1 \overset{\text{def}}{=} A^{m+1}$,

$\boxed{\text{korak}}$ $A^m \cdot A^{n+1} \overset{\text{def}}{=} A^m (A^n \cdot A) \overset{\text{asoc}}{=} (A^m \cdot A^n) \cdot A \overset{\text{p.i.}}{=} A^{m+n} \cdot A \overset{\text{def}}{=} A^{m+n+1}$.

DZ 3.1. Izračunajte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Rješenje Indukcijom dokazati $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

DZ 3.2. Dokažite da je:

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$.

Zadatak 3.4. Dokažite da je $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ako i samo ako je $AB = BA$.

19. Za $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ definiramo **transponiranu matricu** $A^T = (b_{ij}) \in M_{nm}(\mathbb{F})$ s $b_{ij} = a_{ji}$. Dokažite

(a) $\left(A^T\right)^T = A$, $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$,

(b) $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$, $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$,

(c) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, za A, B ulančane,

(d) $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdot A_{k-1}^T \cdots A_1^T$, za $A_1, \ldots, A_k$ ulančane.

(a) očito

(b) imali smo već prije

(c) Neka su $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B = (b_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{F})$. Tada je $(A \cdot B)^T \in M_{pm}(\mathbb{F})$. Kako je $A^T \in M_{nm}(\mathbb{F})$, $B^T \in M_{pn}(\mathbb{F})$, onda je $B^T \cdot A^T \in M_{pm}(\mathbb{F})$ pa se dimenzije danih matrica slažu. Pogledajmo (i,j)–ti element od jedne i druge matrice:

$$\left((A \cdot B)^T\right)_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

$$\left(B^T \cdot A^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(B^T\right)_{ik} \left(A^T\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$

(d) indukcijom iz (c)

Zadatak 3.5. Neka je $D \in M_3$ dijagonalna matrica na čijoj su dijagonali α, β, γ. U ovisnosti o α, β, γ odredite dimenziju prostora $M = \{A \in M_3 : AD = DA\}$.

Rješenje … □

20. Za $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ definiramo **trag** kao $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Zadatak 3.6. (a) Dokažite da je $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$,

(b) Dokažite da je $\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \,\mathrm{Tr}\, A + \beta \,\mathrm{Tr}\, B$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}, A, B \in M_n(\mathbb{F})$.

Rješenje

(a) Neka je $AB = C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, $BA = D = (d_{ij})$, $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$. Tada je

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \mathrm{Tr}(BA).$$

(b) Imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n} [\alpha A + \beta B]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \alpha [A]_{ii} + \beta [B]_{ii} \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} [B]_{ii} = \alpha \operatorname{Tr} A + \beta \operatorname{Tr} B.\end{aligned}$$

ZADATAK 3.7. Dokažite da ne postoje matrice $A, B \in M_n$ takve da vrijedi $AB - BA = I$.

RJEŠENJE

ZADATAK 3.8. Neka je $T \in M_n$. Dokažite da je $M = \{A \in M_n : AT = TA\}$ potprostor od M_n. Može li se dogoditi da je M nul-potprostor? Može li se dogoditi da je M jednak M_n? Odgovore obrazložite.

RJEŠENJE ...

21. Za $A = (A_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ definiramo njoj **konjugiranu** matricu $\overline{A} = (b_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ s $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$.
DZ 3.3. Dokažite da za $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vrijedi

   (a) $\overline{A} = A$ ako i samo ako je A realna matrica
   (b) $\overline{\overline{A}} = A$
   (c) $\overline{\alpha A + \beta B} = \overline{\alpha}\overline{A} + \overline{\beta B}$
   (d) $\overline{A^T} = \overline{A}^T$
   (e) $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, za ulančana matrice A, B.

22. Za $A = (A_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ definiramo njoj **adjungiranu** (ili **hermitski konjugiranu**) matricu $A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}$.
DZ 3.4. Pokažite da vrijedi

   (a) $A^* = A^T$ ako i samo ako je A realna
   (b) $(A^*)^* = A$
   (c) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$
   (d) $(AB)^* = B^* A^*$, za A, B ulančane
   (e) $(A_1 A_2 \cdots A_k)^* = A_k^* A_{k-1}^* \cdots A_1^*$, za $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ulančane.

DEFINICIJA 3.2. Kažemo da je $A \in M_n(\mathbb{F})$

simetrična ako je $A^T = A$,

antisimetrična ako je $A^T = -A$.

Za $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je

hermitska ako je $A^* = A$,

antihermitska ako je $A^* = -A$.

ZADATAK 3.9. (a) Simetrične matrice reda n čine potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije $\frac{n(n+1)}{2}$.

(b) Antisimetrične matrice reda n čine potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije $\frac{n(n-1)}{2}$.

(c) $M_n(\mathbb{F})$ je direktna suma simetričnih i antisimetričnih matrica.

(d) Svaka se kvadratna matrica može na jedinstven način prikazati kao suma simetrične i antisimetrične matrice. Konkretno, vrijedi

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

(e) Produkt dvije simetrične (antisimetrične) matrice ne mora biti simetrična (antisimetrična) matrica.

Produkt dvije simetrične matrice A, B je simetrična matrica ako i samo ako je $AB = BA$.

Produkt dvije antisimetrične matrice A, B je antisimetrična matrica ako i samo ako je $AB = -BA$.

(f) Za bilo koji $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ matrice $AA^T \in M_m(\mathbb{F})$ i $A^T A \in M_n(\mathbb{F})$ su simetrične.

(g) Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ simetrična (antisimetrična) matrica, tada je to i produkt $T^T AT$, za svaki $T \in M_n(\mathbb{F})$.

Rješenje

(a) znamo

(b) znamo

(c) znamo

(d) znamo

(e) Produkt dvije simetrične matrice ne mora biti simetrična matrica:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$.
Produkt dvije simetrične matrice A, B je simetrična matrica ako i samo ako vrijedi $BA = AB$: Vidi se iz računa:

$$(AB)^T = B^T A^T = BA.$$

Produkt dvije antisimetrične matrice ne mora biti antisimetrična matrica:
$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.
Produkt dvije antisimetrične matrice A, B je antisimetrična matrica ako i samo ako vrijedi $BA = -AB$: Vidi se iz računa:

$$(AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A) = BA.$$

(f) DZ

(g) DZ

$\square$

Zadatak 3.10. (a) Hermitske matrice reda n <u>ne</u> čine *kompleksan* potprostor od $M_n(\mathbb{C})$, ali čine realan.

(b) Antihermitske matrice reda n <u>ne</u> čine *kompleksan* potprostor od $M_n(\mathbb{C})$, ali čine realan.

(c) $M_n(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ je direktna suma hermitskih i antihermitskih matrica.

(d) Svaka se kvadratna matrica može na jedinstven način prikazati kao suma hermitske i antihermitske matrice.

(e) Produkt dvije hermitske (antihermitske) matrice ne mora biti hermitska (antihermitska) matrica.

Produkt dvije hermitske matrice A, B je hermitska matrica ako i samo ako je $AB = BA$.

Produkt dvije antihermitske matrice A, B je antihermitska matrica ako i samo ako je $AB = -BA$.

(f) Za bilo koji $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ matrice $AA^* \in M_m(\mathbb{C})$ i $A^*A \in M_n(\mathbb{C})$ su simetrične.

(g) Ako je $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska (antihermitska) matrica, tada je to i produkt T^*AT, za svaki $T \in M_n(\mathbb{C})$.

Rješenje

(a) Primijetimo da je $A = A^* \Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Posebno je $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ pa je dijagonala realna. Dakle, hermitske matrice ne čine kompleksan potprostor.

Čine realan potprostor jer za A, B hermitske i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* = \alpha A + \beta B.$$

Dimenzija tog potprostora je $n + 2(n - 1 + n - 2 + \ldots + 1) = n^2$.

(b) Primijetimo da je $-A = A^* \Leftrightarrow -a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Posebno je $-a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ pa je dijagonala čisto imaginarna. Dakle, antihermitske matrice ne čine kompleksan potprostor.

Čine realan potprostor jer za A, B antihermitske i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* = \alpha(-A) + \beta(-B) = -(\alpha A + \beta B).$$

Dimenzija tog potprostora je $n + 2(n - 1 + n - 2 + \ldots + 1) = n^2$ (isto kao za hermitske).

(c) Svaka se kvadratna matrica može prikazati kao suma hermitske i antihermitske matrice:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$$

a jedina matrica koja je i hermitska i antihermitska je nul-matrica. Moglo se i drukčije, npr. uspoređivanjem dimenzija.

(d) iz prethodnog

(e) npr. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

npr. $C = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 2i & i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} i & 3i \\ 3i & i \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$.

ostatak za DZ

(f) DZ

(g) DZ

Zadatak 3.11. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **dijagonalna** ako je $a_{ij} = 0$, $i \neq j$. Skup svih dijagonalnih matrica je potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije n. Dapače, on je i algebra, i to komutativna, asocijativna algebra s jedinicom.

Rješenje Neka je $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $B = \operatorname{diag}(b_{11}, \ldots, b_{nn})$. Tada je

$$\alpha A + \beta B = \operatorname{diag}(\alpha a_{11} + \beta b_{11}, \ldots, \alpha a_{nn} + \beta b_{nn}).$$

Baza tog prostora je $\{E_{ii} : i = 1, \ldots, n\}$.
Također je

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ii} \delta_{ik} b_{jj} \delta_{kj} = \begin{cases} a_{ii} b_{ii}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Stoga je $AB = \operatorname{diag}(a_{11} b_{11}, \ldots, a_{nn} b_{nn})$.
Asocijativnost množenja, kvaziasocijativnost i distributivnosti naslijeđene su iz $M_n(\mathbb{F})$. Također je $I = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ i vrijedi $AI = IA = A$. Očito je

$$BA = \operatorname{diag}(b_{11} a_{11}, \ldots, b_{nn} a_{nn}) = \operatorname{diag}(a_{11} b_{11}, \ldots, a_{nn} b_{nn}) = AB.$$

$\square$

DZ 3.5. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **skalarna** ako je $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Skup svih skalarnih matrica je potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije 1. Dapače, on je i algebra, i to komutativna, asocijativna s jedinicom.

Definicija 3.3. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **regularna** (**invertibilna**) ako postoji matrica $X \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $AX = XA = I$. Tada je X **inverzna matrica** ili **inverz** od A. Pišemo $X = A^{-1}$. Ako takva matrica X ne postoji, za A kažemo da je **singularna**.

Činjenice 3.4.

1. Ako A^{-1} postoji, jedinstvena je.
2. I je regularna, 0 je singularna.
3. Ako su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ regularne, tada je i AB regularna i vrijedi
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. Regularne matrice s operacijom množenja čine grupu, oznaka $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ (opća linearna grupa reda n nad $\mathbb{F}$). Ta grupa nije komutativna.

Zadatak 3.12. Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ takva da je $\det A = ad - bc \neq 0$. Dokažite da je $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i nađite A^{-1}.

Rješenje Neka je X takva da je $AX = I$. Tada je

$$AX = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_3 = 1 \\ cx_1 + dx_3 = 0 \\ ax_2 + bx_4 = 0 \\ cx_2 + dx_4 = 1 \end{cases}$$

Rješenje tog sustava je □

$$x_1 = \frac{d}{ad-bc}, \quad x_3 = \frac{-c}{ad-bc}, \quad x_2 = \frac{-b}{ad-bc}, \quad x_4 = \frac{a}{ad-bc}.$$

$$X = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Lako se provjeri da vrijedi i $XA = I$, pa je $X = A^{-1}$.

ZADATAK 3.13. Ako je $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$, onda je i $A^T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ i $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

RJEŠENJE Ako je A regularna, onda postoji X takva da je $AX = XA = I$. Ako transponiramo matrice u prethodnim jednakostima, dobivamo

$$X^T A^T = A^T X^T = I^T = I$$

pa je i A^T regularna. Iz gornjih jednakosti čitamo da je $\left(A^T\right)^{-1} = X^T = (A^{-1})^T$.

DZ 3.6. Dokažite da je svaka matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, regularna i nađite njen inverz.

DZ 3.7. Neka su $A, B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$. Primjerom pokažite da $A + B$ ne mora biti regularna.

DZ 3.8. Neka je $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Dokažite da je $\alpha A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ i nađite $(\alpha A)^{-1}$.

DZ 3.9. Neka je $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$. Tada su $\overline{A}, A^* \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ i vrijedi

$$\overline{(A^{-1})} = \left(\overline{A}\right)^{-1}, \quad \left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}.$$

DZ 3.10. Za $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ i $p \in \mathbb{N}$ definiramo

$$A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p.$$

Dokažite da vrijedi

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

ZADATAK 3.14. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **ortogonalna** ako je $A^T A = AA^T = I$. Očito je svaka ortogonalna matrica regularna i vrijedi $A^{-1} = A^T$. Dokažite da skup svih ortogonalnih matrica $O(n,\mathbb{F})$ čini multiplikativnu grupu.

RJEŠENJE Ako su $A, B \in O(n,\mathbb{F})$, onda je $AB \in O(n,\mathbb{F})$. Doista, inverz od AB je $B^T A^T = (AB)^T$. Asocijativnost je naslijeđena iz $GL(n,\mathbb{F})$. Jedinična matrica je ortogonalna. Inverz ortogonalne matrice je opet ortogonalna matrica jer $AA^T = A^T A = I$ povlači $\left(A^T\right)^{-1} A^{-1} = A^{-1}\left(A^T\right)^{-1} = I^{-1} = I$, tj.

$$\left(A^{-1}\right)^T A^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T = I^{-1} = I.$$

PRIMJER 3.5. Primjer ortogonalne matrice $A \in O(2,\mathbb{R})$ je $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Provjerite!

ZADATAK 3.15. Neka je $A = (a_{ij}) \in O(n,\mathbb{F})$. Tada vrijedi

(a) $\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

(b) $\sum_{j=1}^n a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Rješenje Iz $AA^T = I$ slijedi

$$\delta_{ik} = I_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} {A^T}_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj}.$$

Slično iz $A^T A = I$ slijedi

$$\delta_{ik} = I_{ik} = \sum_{j=1}^{n} {A^T}_{ij} A_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk}.$$

Uoči: posebno za $i = k$ iz (a) dobivamo da je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$. Za $i \neq k$ je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = 0$, tj. suma kvadrata elemenata nekog retka je 1, a suma produkata odgovarajućih elemenata dvaju različitih redaka je 0. Analogno za stupce iz (b). $\square$

Definicija 3.6. Za matricu A kažemo da je **involutorna** ako je $A^2 = I$.

Očito je svaka involutorna matrica regularna i vrijedi $A^{-1} = A$.

Zadatak 3.16. Dokažite da ako matrica A ima bilo koje od sljedeća dva svojstva:

(1) A je simetrična,

(2) A je ortogonalna,

(3) A je involutorna,

onda ima i treće.

Rješenje

$(1), (2) \Rightarrow (3)$: Ako je $A = A^T$ i $AA^T = A^T A = I$, onda je $A^2 = I$.

$(1), (3) \Rightarrow (2)$: Ako je $A = A^T$ i $A^2 = I$, onda je $I = A^2 = AA^T = A^T A$.

$(2), (3) \Rightarrow (1)$: Ako je $AA^T = A^T A = I$ i $AA = I$, iz jedinstvenosti inverza dobivamo da je $A^{-1} = A^T = A$ pa je $A = A^T$.

$\square$

DZ 3.11. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je **unitarna** ako vrijedi

$$AA^* = A^* A = I.$$

Unitarna matrica je regularna i vrijedi $A^{-1} = A^*$. Dokažite da skup svih unitarnih matrica $U(n)$ čini multiplikativnu grupu.

DZ 3.12. Neka je $A = (a_{ij}) \in U(n)$. Dokažite:

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{a_{kj}} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

(b) $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \overline{a_{jk}} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Zadatak 3.17. Dokažite da ako matrica A ima bilo koje od sljedeća dva svojstva:

(1) A je realna,

(2) A je ortogonalna,

(3) A je unitarna,

onda ima i treće.

DZ 3.13. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **idempotentna** ako je $A^2 = A$. Pokažite da je idempotentna matrica regularna ako i samo ako je jedinična.

DZ 3.14. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ takve da je $2A - B = I$. Dokažite da je matrica A idempotentna ako i samo ako je B involutorna.

Rješenje Ako je $A^2 = A$, onda imamo

$$\begin{aligned} 2A &= I + B \,/^2 \\ 4A^2 &= I + 2B + B^2 \\ 4A - 2B &= I + B^2 \\ 2I &= I + B^2 \\ B^2 &= I. \end{aligned}$$

Ako je $B^2 = I$, onda

$$\begin{aligned} B &= 2A - I \,/^2 \\ \cancel{B^2} &= 4A^2 - 4A + \cancel{I} \\ 4A^2 &= 4A \\ A^2 &= A. \end{aligned}$$

DZ 3.15. Dokažite da je inverz simetrične matrice (ako postoji) simetrična matrica.

DZ 3.16. Ako je matrica A^2 regularna, je li i A regularna?

Rješenje Neka je X takva da je $A^2X = XA^2 = I$. Ove jednakosti možemo zapisati i kao

$$A(AX) = (XA)A = I.$$

Da bi pokazali da je A regularna, dovoljno nam je provjeriti da je $AX = XA$, što slijedi iz

$$AX = I \cdot AX = (XA^2)AX = XA(A^2X) = XA \cdot I = XA.$$

DZ 3.17. Ovisno o $n \in \mathbb{N}$: ako je matrica A^n regularna, je li i A regularna?

DZ 3.18. Neka su $A, B \in M_n$ takve da vrijedi $A + B + AB = 0$. Dokažite da tada matrice A i B komutiraju.

DZ 3.19.

Poglavlje 4

Determinante

Definicija 4.1. Definiramo **determinantu** matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ kao

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}.$$

Posebno za $n = 2$ je

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

a za $n = 3$ je

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

što možemo pamtiti pomoću *Sarrusovog pravila*:

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

Napomenimo da Sarrusovo pravilo vrijedi samo za matrice reda 3, za matrice višeg reda nemamo čak ni dobar broj sumanada u formuli za determinantu!

Primjer 4.2. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje Pomoću Sarrusovog pravila: $\det = 18 + 2 + 60 - 9 - 15 - 16 = 40$. □

Zbog kompliciranosti računanja determinante po definiciji, koristimo sljedeća svojstva:

Činjenice 4.3.

1. $\det A = \det A^T$, $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.
2. Ako je matrica B dobivena iz matrice A zamjenom bilo koja dva retka ili stupca, onda je $\det B = -\det A$.
3. Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog retka ili stupca skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je $\det B = \lambda \det A$.

4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

5. Ako matrica A ima bilo koja dva retka (stupca) proporcionalna, onda je $\det A = 0$.

6. Neka su $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ matrice sa svojstvom da je za neki redak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$
$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & i = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & i \neq k \end{cases}, \quad j = 1, \ldots, n,$$
onda je $\det C = \det A + \det B$.

7. (analogno za stupce)
$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & j = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & j \neq k \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Tada je $\det C = \det A + \det B$.

8. Ako A ima nulredak ili nulstupac, onda je $\det A = 0$.

9. Općenito $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

10. Ako je matrica B dobivena iz matrice A dodavanjem nekom retku (stupcu) matrice A linearne kombinacije ostalih redaka (stupaca) matrice A, onda je $\det B = \det A$.

11. Ako je neki redak (stupac) matrice A jednak linearnoj kombinaciji preostalih redaka (stupaca) matrice A, onda je $\det A = 0$.

12. $\det I = 1$.

13.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Ukratko: pri računanju determinante koristimo **elementarne transformacije** nad matricom A:

1. Zamjena dva retka (stupca) u A,

2. Množenje nekog retka (stupca) u A skalarom $\lambda \neq 0$,

3. Pribrajanje s–tom retku (stupcu) u A r–tog retka (stupca) od A pomnoženog s $\lambda \in \mathbb{F}$.

Zadatak 4.1. Ponovo izračunajte:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{I \leftrightarrow III}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{I\cdot(-5)+II \\ I\cdot(-2)+III}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -17 & -13 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{II\cdot(-1) \\ III\cdot(-1) \\ II \leftrightarrow III}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 17 & 13 \end{vmatrix} \overset{\substack{III\cdot 7 \\ II\cdot(-17)+III}}{=} \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \cdot (1 \cdot 7 \cdot 40) = 40$$

□

NAPOMENA 4.4. Površina paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} \in V^2(O)$ je dana sa

$$P = |\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}| = |a_1b_2 - a_2b_1|.$$

ZADATAK 4.2. Odredite površinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}, \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \in V^2(O)$.
RJEŠENJE

$$P = |\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}| = |1 \cdot 4 - 2 \cdot 3| = 2$$

□

NAPOMENA 4.5. Volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}, \vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \in V^3(O)$ je dan sa

$$V = |\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}|.$$

ZADATAK 4.3. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da je volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + \lambda\vec{k}, \vec{c} = \vec{j} + \vec{k} \in V^3(O)$ jednak 2.
RJEŠENJE Imamo

$$2 = |\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}| = |0 + 0 + 0 - 0 - \lambda - 1| = |\lambda + 1|.$$

Dakle $\lambda + 1 = \pm 2$, pa je $\lambda = 1$ ili $\lambda = -3$. □

4.1 Laplaceov razvoj determinante

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$. Tada je

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \tag{4.1}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad \forall j = 1, \dots, n, \tag{4.2}$$

gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, a Δ_{ij} je determinanta matrice $(n-1)$–og reda koja nastaje uklanjanjem i–tog retka i j–tog stupca iz originalne matrice A.
Jednakost (4.1) se zove **Laplaceov razvoj po i–tom retku**, a (4.2) se zove **Laplaceov razvoj po j–tom stupcu**. Determinanta Δ_{ij} se naziva **subdeterminanta** ili **minora** matrice A određena elementom a_{ij}. Broj A_{ij} se naziva **algebarski komplement** ili **kofaktor** elementa a_{ij} matrice A.

ZADATAK 4.4. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

razvojem po prvom retku.

RJEŠENJE

$$\begin{vmatrix} 4^+ & -3^- & 5^+ \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 4\cdot 66 + 3\cdot(-23) + 5\cdot(-19) = 100.$$

ZADATAK 4.5. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

razvojem po drugom stupcu.

RJEŠENJE

$$\begin{vmatrix} a & b^- & c \\ c & a^+ & b \\ b & c^- & a \end{vmatrix} = -b\begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = -b(ca-b^2)+a(a^2-bc)-c(ab-c^2) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

DZ 4.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

DZ 4.2.

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc + x(ab+ac+bc)$$

DZ 4.3.

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd$$

DZ 4.4.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & c & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = xyzuv$$

DZ 4.5.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

DZ 4.6. Neka su $x, y, z \neq 0$. Dokažite bez računanja determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Kao poseban slučaj se može raspisati kad je bilo koji od x, y, z jednak 0. Slijedi rješenje za slučaj $x, y, z \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{II\cdot(yz) \\ III\cdot(xz) \\ IV\cdot(xy)}}{=} \frac{1}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ xyz & 0 & yz^2 & y^2z \\ xyz & xz^2 & 0 & x^2z \\ xyz & xy^2 & x^2y & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{I:(xyz) \\ II:x \\ III:y \\ IV:z}}{=} \frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

DZ 4.7. Neka je S skup svih matrica reda n koje sadrže samo 0 ili 1. Dokažite da je prosječna vrijednost determinante matrice za taj skup jednaka 0, odnosno

$$\frac{1}{|S|}\sum_{A\in S}\det A = 0.$$

DZ 4.8. Neka je $A \in M_n$ matrica koja sadrži samo -1 ili 1. Dokažite da 2^{n-1} dijeli $\det A$.

DZ 4.9. Sami si zadavati determinante i provjeravati na www.wolframalpha.com.

4.2 Metode računanja determinanti n–tog reda

4.2.1 Svođenje na trokutasti oblik

Zadatak 4.6. Izračunajte:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Rješenje Prvi redak pomnožen s -1 ćemo dodati svim ostalima.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \text{gornjetrokutasti oblik} = (-1)^{n-1}.$$

□

Zadatak 4.7. Izračunajte:

$$D(a_1,\dots,a_n;x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Rješenje Ako su neka dva od $a_1,\dots,a_n$ jednaka x, onda matrica ima dva jednaka retka pa je njena determinanta 0. Ako je $a_k = x$, za samo jedan k, pretpostavimo da je to a_1 pa imamo

$$D(x,a_2,\dots,a_n;x) = \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} \underset{\text{dodajemo svim ostalima}}{\overset{\text{prvi redak pomnožen s -1}}{=}} \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}$$
$$= x(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_n-x).$$

Analogno

$$D(a_1,\dots,a_{k-1},x,a_{k+1},\dots,a_n;x) = (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_{k-1}-x)x(a_{k+1}-x)\cdots(a_n-x).$$

Ako je $a_i \neq x$, za sve $i = 1, \ldots, n$, onda imamo

$$D(a_1, \ldots, a_n; x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ x & a_2 & x & \ldots & x \\ x & x & a_3 & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \ldots & a_n \end{vmatrix} \underset{\text{dodajemo svim ostalima}}{\overset{\text{prvi redak pomnožen s -1}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \ldots & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \ldots & a_n - x \end{vmatrix} \underset{\text{iz } k\text{–tog stupca}}{\overset{\text{izlučimo } a_k - x}{=}}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (a_k - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \ldots & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{prvom stupcu}}{\overset{\text{sve stupce dodamo}}{=}}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (a_k - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} + x \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{a_k - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \ldots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (a_k - x) \left(\frac{a_1}{a_1 - x} + x \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{a_k - x} \right).$$

Zadatak 4.8. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{svakom drugom}}{\overset{\text{prvi redak dodamo}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 2 & 6 & \ldots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!.$$

ZADATAK 4.9. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Primijetimo da je ovaj zadatak specijalni slučaj Zadatka 4.7 pa uvrštavanjem u formulu koju smo tamo izveli dobivamo:

$$D_n = \prod_{k=1}^{n}(3-2)\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3-2}\right) = 2n+1.$$

No, riješit ćemo zadatak i direktno:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \substack{\text{prvi redak oduzmemo} \\ \text{od ostalih}} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \substack{\text{prvom stupcu dodamo} \\ \text{preostale stupce}}$$

$$= \begin{vmatrix} 3+(n-1)2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 3+2(n-1) = 2n+1.$$

□

ZADATAK 4.10. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Računamo po definiciji:

$$D_n = \sum_{p\in S_n}(-1)^{I(p)}a_{1p(1)}a_{2p(2)}\cdots a_{np(n)}$$

Od cijele sume ostaje jedino sumand pridružen permutaciji $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ koja ima $I(p) = n-1+n-2+\ldots+2+1 = \frac{(n-1)n}{2}$ inverzija:

$$D_n = (-1)^{I(p)}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n. \tag{4.3}$$

Determinantu smo mogli izračunati i tako da je svedemo na dijagonalni oblik pomoću zamjena stupaca (prvog i zadnjeg, drugog i predzadnjeg, itd...). Takvih zamjena treba napraviti $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ pa je

$$D_n = (-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

Uvjerite se da je to jednako kao i (4.3). □

ZADATAK 4.11. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = \min\{i, j\}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

RJEŠENJE

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \end{vmatrix} = \substack{\text{prvi redak pomnožen s (-k)} \\ \text{dodajemo } k\text{-tom retku}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & 3-n & 4-n & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \substack{\text{razvijemo po} \\ \text{zadnjem stupcu}} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -3 & -2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & 3-n & \ldots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = 1.$$

ZADATAK 4.12. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = |i - j|$, $i, j = 1, \ldots, n$.

RJEŠENJE Uočimo da je

$$|i-j| = \begin{cases} i-j, & i > j \text{ (donji trokut matrice } A) \\ 0, & i = j \text{ (dijagonala matrice } A) \\ j-i, & i < j \text{ (gornji trokut matrice } A) \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & n-5 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{zadnji stupac} \\ \text{dodajemo preostalima}}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-3 & n-1 \\ n-1 & n-2 & n-1 & n & \dots & 2n-5 & n-2 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-2 & \dots & 2n-7 & n-3 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 2n-9 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{iz prvog stupca} \\ \text{izlučimo } n-1}}{=}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-3 & n-1 \\ 1 & n-2 & n-1 & n & \dots & 2n-5 & n-2 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-2 & \dots & 2n-7 & n-3 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 2n-9 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{prvi stupac pomnožen s } n-k \\ \text{dodajemo } k\text{–tom stupcu}}}{=}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n-4 & n-1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & \dots & 2n-6 & n-2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2n-8 & n-3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-10 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{razvijemo po} \\ \text{zadnjem retku}}}{=}$$

$$= (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & \dots & 2n-4 & n-1 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2n-6 & n-2 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2n-8 & n-3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-10 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

□

ZADATAK 4.13. Neka su $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ proizvoljni brojevi. Izračunajte tzv. **Vandermondeovu**[1]

[1] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

determinantu:

$$D(a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} D(a_1,\ldots,a_n) &\underset{\substack{\text{poništimo prvi stupac}\\ \text{ispod dijagonale}\\ \text{najprije množimo } (n-1) \text{ redak}\\ \text{s } -a_1 \text{ i dodajemo zadnjem}}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \ldots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{\text{množimo } (n-2) \text{ redak s } -a_1\\ \text{i dodajemo predzadnjem}}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \ldots & a_{n-3}^{n-2} & a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_3^{n-3}(a_2-a_1) & \ldots & a_{n-1}^{n-3}(a_2-a_1) & a_n^{n-3}(a_2-a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \ldots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{\text{postupak ponavljamo dok ne}\\ \text{poništimo 1. stupac ispod dijagonale}}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \ldots & a_{n-1}-a_1 & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \ldots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_1) & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-4}(a_2-a_1) & a_3^{n-4}(a_3-a_1) & \ldots & a_{n-1}^{n-4}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-4}(a_n-a_1) \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_3^{n-3}(a_3-a_1) & \ldots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-3}(a_n-a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \ldots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{\text{razvijemo determinantu po prvom stupcu}\\ \text{i iz } k\text{–tog stupca izlučimo faktor } a_k-a_1,\ \forall k\geq 2}}{=} \\ &= \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \ldots & a_{n-1}^{n-3} & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)D(a_2,\ldots,a_n). \end{aligned}$$

Dobili smo determinantu istog tipa kao i početnu pa i kod nje radimo isti postupak. Dobivamo

$$\begin{aligned} D(a_1,\dots,a_n) &= \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\prod_{k=3}^{n}(a_k-a_2)D(a_3,\dots,a_n) \\ &= \dots = \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\prod_{k=3}^{n}(a_k-a_2)\cdots\prod_{k=n-1}^{n}(a_k-a_{n-2})\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n}(a_j-a_i). \end{aligned}$$

Očito je $D = 0$ ako i samo ako je $a_i = a_j$, za neke $i \neq j$. □

DZ 4.10. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = \max\{i, j\}$, $i, j = 1, \dots, n$.

DZ 4.11. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}n.$$

4.2.2 Metoda rekurzivnih relacija

Ideja ove metoda je da se determinanta n–tog reda, razvojem po nekom retku ili stupcu, zapiše kao linearna kombinacija determinanti reda $n-1$ i $n-2$ istog oblika.

Neka je $D_n \in \mathbb{F}$ determinanta n–tog reda, $n > 2$, i neka su $D_{n-1}, D_{n-2} \in \mathbb{F}$ determinante $(n-1)$ i $(n-2)$ reda, ali istog oblika kao D_n. Pretpostavimo da je

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

gdje su p, q konstante neovisne o n. Razlikujemo dva slučaja.

1. $q = 0$

   Tada je $D_n = pD_{n-1}$ pa je

   $$D_n = pD_{n-1} = p^2D_{n-2} = \dots = p^{n-2}D_2.$$

   U ovom slučaju je niz determinanti (D_n) zapravo geometrijski niz s kvocijentom p.

2. $q \neq 0$

   Za ovaj slučaj pogledajmo karakterističnu jednadžbu rekurzivne relacije

   $$D_n - pD_{n-1} - qD_{n-2} = 0.$$

   To je kvadratna jednadžba $x^2 - px - q = 0$. Neka su α, β njeni korijeni. Prema Vièteovim formulama je

   $$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = -q.$$

Sada relaciju (4.4) možemo pisati na dva načina

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \beta D_{n-2}\right), \tag{4.5}$$
$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right). \tag{4.6}$$

Razlikujemo dva slučaja:

(a) $\alpha \neq \beta$
Iteriranjem jednadžbi (4.5) i (4.6) dobivamo

$$\begin{aligned} D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha\left(D_{n-1} - \beta D_{n-2}\right) = \alpha^2\left(D_{n-2} - \beta D_{n-3}\right) = \ldots = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \beta D_1\right), \\ D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right) = \beta^2\left(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}\right) = \ldots = \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right). \end{aligned}$$

Dobili smo jednadžbe

$$\begin{aligned} D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha^{n-2}\left(D_2 - \beta D_1\right), \\ D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right). \end{aligned}$$

Prvu jednadžbu pomnožimo s α, drugu s $-\beta$ pa ih zbrojimo:

$$(\alpha - \beta) D_n = \alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1).$$

Jer je $\alpha \neq \beta$, možemo pisati

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta},$$

odnosno

$$D_n = \underbrace{\frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}}_{=C_1} \alpha^n + \underbrace{\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\beta - \alpha)}}_{=C_2} \beta^n, \quad n \geq 2. \tag{4.7}$$

(b) $\alpha = \beta$
Sada su (4.5) i (4.6) jedna te ista relacija

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right), \quad n \geq 2, \tag{4.8}$$

pa je

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right) = \alpha^2\left(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}\right) = \ldots = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right).$$

Dakle,

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right). \tag{4.9}$$

Ta relacija vrijedi i za D_{n-1} pa je

$$D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \alpha^{n-3}\left(D_2 - \alpha D_1\right),$$

tj. $D_{n-1} = \alpha^{n-3}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha D_{n-2}$. Uvrstimo u (4.9) i dobivamo:

$$D_n = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^2 D_{n-2} + \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) = 2\alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^2 D_{n-2}. \tag{4.10}$$

Ako u (4.9) umjesto n stavimo $n-2$, dobivamo

$$D_{n-2} - \alpha D_{n-3} = \alpha^{n-4}\left(D_2 - \alpha D_1\right)$$

pa je $D_{n-2} = \alpha^{n-4}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha D_{n-3}$. Ovo uvrstimo u (4.10):

$$D_n = 2\alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^3 D_{n-3}.$$

Postupak ponavljamo i na kraju dobivamo

$$D_n = (n-1)\alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^{n-1} D_1. \tag{4.11}$$

NAPOMENA 4.6. Primijetimo da ako su $p, q, D_1, D_2 \in S$, gdje je $S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, tada je i $D_n \in S$.

ZADATAK 4.14. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$D_n \overset{\text{razvijemo determinantu}}{\underset{\text{po prvom stupcu}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{razvijemo drugu determinantu}}{\underset{\text{po prvom retku}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} + D_{n-2}.$$

Karakteristična jednadžba ove rekurzivne relacije je $x^2 - x - 1 = 0$. Njeni korijeni su

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Kako je $D_1 = |1| = 1$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ i $\alpha \neq \beta$, iz (4.7) dobivamo

$$D_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot 1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(-\sqrt{5}\right)}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}.$$

Uočimo da je, iako se možda ne bi reklo iz ovog izraza, $D_n \in \mathbb{N}$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Napomena 4.7. Ne moramo znati točnu formulu da bismo odredili D_n, već je dovoljno samo znati da je ona oblika $D_n = A\cdot\alpha^n + B\cdot\beta^n$ (ili $D_n = A\cdot\alpha^n + Bn\cdot\alpha^{n-1}$ ako je $\alpha=\beta$) pa onda uvrštavanjem konkretnih vrijednosti determinanti D_1 i D_2 za $n = 1,2$ (ako to ima smisla) dobijemo 2×2 sustav iz kojeg kao nepoznanice dobijemo konstante A i B. Ako iz nekog razloga ne možemo uvrstiti D_1 ili D_2, onda krenemo od najmanjeg n za kojeg vrijednosti D_n i D_{n+1} imaju smisla. Također primijetite da formulu $D_n = A\cdot\alpha^n + B\cdot\beta^n$ možemo zapisati i u nekom drugom obliku koji vodi na jednostavniji sustav. Na primjer, ako je $D_n = A\cdot\alpha^{n-1} + B\cdot\beta^{n-1}$, uvrštavanjem D_n za $n = 1,2$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} A + B = D_1 \\ \alpha A + \beta B = D_2 \end{cases}.$$

DZ 4.12. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$D_n \overset{\text{razvijemo determinantu}}{\underset{\text{po prvom retku}}{=}} 5\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{7}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{razvijemo drugu determinantu}}{\underset{\text{po prvom stupcu}}{=}} 5\tilde{D}_{n-1} - \frac{7}{2}\cdot 4\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\tilde{D}_{n-1} - 14\tilde{D}_{n-2}.$$

Sad ćemo izračunati $\tilde{D}_n$, $n\in\mathbb{N}$.

$$\tilde{D}_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{razvijemo determinantu}}{\underset{\text{po prvom stupcu}}{=}} 3\tilde{D}_{n-1} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{razvijemo drugu determinantu}}{\underset{\text{po prvom retku}}{=}} 3\tilde{D}_{n-1} - 2\tilde{D}_{n-2}.$$

Karakteristična jednadžba ove rekurzivne relacije je $x^2 - 3x + 2 = 0$. Njeni korijeni su $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

Kako je $\tilde{D}_1 = |3| = 3$, $\tilde{D}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$ i $\alpha \neq \beta$, iz (4.7) dobivamo

$$D_n = \frac{1^n(7-2\cdot 3)}{1(1-2)} + \frac{2^n(7-1\cdot 3)}{2(2-1)} = 2^{n+1} - 1.$$

Konačno,

$$D_n = 5\left(2^n - 1\right) - 14\left(2^{n-1} - 1\right) = 9 - 2^{n+1}.$$

□

Zadatak 4.15. Izračunajte:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$D_{2n} \underset{\text{prvom stupcu}}{\overset{\text{razvijemo po}}{=}} a \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{po zadnjem stupcu}}{\overset{\text{obje determinate razvijemo}}{=}} a^2 D_{2(n-1)} - (-1)^{2n} b^2 D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2) D_{2(n-1)}$$

$$= \left(a^2 - b^2\right)^2 D_{2(n-2)} = \dots = \left(a^2 - b^2\right)^{n-1} D_2 = \left(a^2 - b^2\right)^n.$$

□

Zadatak 4.16. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$D_n \underset{\text{prvom retku}}{\overset{\text{razvoj po}}{=}} n \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= nx^{n-1} + D_{n-1} \underset{\text{dalje}}{\overset{\text{rekurzivno}}{=}} nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + D_{n-2}$$

$$= \dots = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 3x^2 + D_2$$

$$= \sum_{k=3}^{n} kx^{k-1} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \sum_{k=3}^{n} kx^{k-1} + 2x + 1 = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

Posljednji izraz možemo zapisati i bez sumacije ako se poslužimo derivacijama:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Naravno, prethodni izraz nema smisla za $x = 1$ pa za tu vrijednost determinantu računamo kao $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 1^{k-1} = \frac{n(n+1)}{2}$.

DZ 4.13. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

Rješenje Razvoj po prvom retku pa po prvom stupcu pa je

$$D_n = -D_{n-2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ paran} \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}.$$

DZ 4.14. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

Rješenje Ako je n paran, onda 2., 4., …, n. redak pomnožen s -1 dodajemo prvom i dobijemo nulredak pa je $\det D_{2k} = 0$.
Ako je n neparan, onda istim postupkom dobijemo gornjetrokutasti oblik i $\det D_{2k+1} = 1$.

DZ 4.15. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

Rješenje Determinantu razvijemo po prvom stupcu i dobijemo

$$D_n = D_{n-1} - 2D_{n-1} = -D_{n-1}$$

pa je $D_n = (-1)^{n-1}$.

ZADATAK 4.17. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a \end{vmatrix},$$

ako je $x \neq y$.

RJEŠENJE Koristimo se trikom pomoću kojeg ćemo D_n izraziti na dva načina.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a-y+y \end{vmatrix} \overset{\text{rastavimo determinantu}}{\underset{\text{po zadnjem retku}}{=}} \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ y & y & y & \dots & y & y \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{prvu determinantu razvijemo po zadnjem retku,}}{\underset{\text{a u drugoj izlučimo } y \text{ iz zadnjeg retka}}{=}} (a-y)D_{n-1} + y \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{poništimo gornji trokut množeći}}{\underset{\text{zadnji redak s } -x}{=}} (a-y)D_{n-1} + y \begin{vmatrix} a-x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y-x & a-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y-x & y-x & a-x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y-x & y-x & y-x & \dots & a-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-y)D_{n-1} + y(a-x)^{n-1}.$$

Sad drugi način.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a-x+x \end{vmatrix} \overset{\text{rastavimo determinantu po zadnjem retku}}{=} \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{prvu determinantu razvijemo po zadnjem retku,} \\ \text{a u drugoj izlučimo } x \text{ iz zadnjeg stupca}}}{=} (a-x)D_{n-1} + x \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & 1 \\ y & a & x & \dots & x & 1 \\ y & y & a & \dots & x & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & 1 \\ y & y & y & \dots & y & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{poništimo donji trokut množeći} \\ \text{zadnji stupac s } -y}}{=} (a-x)D_{n-1} + x \begin{vmatrix} a-y & x-y & x-y & \dots & x-y & 1 \\ 0 & a-y & x-y & \dots & x-y & 1 \\ 0 & 0 & a-y & \dots & x-y & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)D_{n-1} + x(a-y)^{n-1}.$$

Dobili smo

$$\begin{aligned} D_n &= (a-y)D_{n-1} + y(a-x)^{n-1}, \\ D_n &= (a-x)D_{n-1} + x(a-y)^{n-1}. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu relaciju s $a-x$, drugu s $-(a-y)$ pa zbrojimo i dobivamo

$$[(a-x)-(a-y)]\,D_n = (a-x)^n y - (a-y)^n x,$$

tj.

$$D_n = \frac{y(a-x)^n - x(a-y)^n}{y-x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ako je $x = y$, onda je ovo Zadatak 4.7.

DZ 4.16. Izračunajte:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ b & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ b^2 & b & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$D_{n+1} \overset{\text{drugi redak pomnožen s } -a}{\underset{\text{dodamo prvom retku}}{=}} \begin{vmatrix} 1-ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ b^2 & b & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{treći redak pomnožen s } -a}{\underset{\text{dodamo drugom retku}}{=}} \begin{vmatrix} 1-ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b-b^2a & 1-ab & 0 & \dots & 0 \\ b^2 & b & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{postupak}}{\underset{\text{ponavljamo}}{=}} \begin{vmatrix} 1-ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b-b^2a & 1-ab & 0 & \dots & 0 \\ b^2-b^3a & b-b^2a & 1-ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = (1-ab)^n.$$

□

DZ 4.17.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} = (2n-1)(n-1)^{n-1}.$$

DZ 4.18.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!.$$

DZ 4.19.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}}(n-2)!.$$

DZ 4.20.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

DZ 4.21.

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right).$$

4.2.3 Binet–Cauchyjev teorem

ČINJENICE 4.8.

1. Prisjetimo se Laplaceovog razvoja

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

   gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ algebarski komplement elementa a_{ij}.

2. Vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{il} = 0, \quad j \neq l \tag{4.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0, \quad i \neq k \tag{4.13}$$

3. Za $A \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$, definiramo **adjunktu**

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

   gdje je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij}.

4. Vrijedi

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = (\det A)\, I. \tag{4.14}$$

5. Binet–Cauchyjev teorem: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$.

6. Posljedice:

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

$$A \text{ je regularna } \Leftrightarrow \det A \neq 0, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

7. U dokazu Binet–Cauchyjevog teorema koristimo

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B,$$

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

   Na lijevoj strani su determinant blok–matrica, pri čemu su A i B kvadratne matrice, ne nužno istih redova.

ZADATAK 4.18. Neka je A matrica reda 2.

1. Dokažite da vrijedi $A^2 - (\operatorname{Tr} A) \cdot A + (\det A) \cdot I = 0$.
2. Dokažite da je $A^2 = 0$ ako i samo ako je $\operatorname{Tr} A = \det A = 0$.
3. Provjerite je li skup $N = \{A \in \mathrm{M}_2 : A^2 = 0\}$ vektorski prostor.
4. Odredite bazu i dimenziju za linearnu ljusku $[N]$.

RJEŠENJE

(b) Ako je $A^2 = 0$, tada prema Binet-Cauchyjevom teoremu slijedi $\det A = 0$. Sada iz $A^2 - (\operatorname{Tr} A) \cdot A + (\det A) \cdot I = 0$ slijedi $(\operatorname{Tr} A) \cdot A = 0$, pa je $\operatorname{Tr} A = 0$ ili $A = 0$, u oba slučaja je $\operatorname{Tr} A = 0$. Obrat slijedi direktno iz $A^2 - (\operatorname{Tr} A) \cdot A + (\det A) \cdot I = 0$.

(c) Ne, na primjer $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pripadaju skupu N, ali ne i njihov zbroj.

(d) Pokazuje se da je $[N]$ prostor svih matrica traga 0, pa je trodimenzionalan, a jednu bazu čine $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

□

ZADATAK 4.19. Nađite $\det \tilde{A}$ i $\widetilde{\left(\tilde{A}\right)}$, za regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$.

RJEŠENJE Iz (4.14) dobivamo

$$\det A \cdot \det \tilde{A} \overset{BC}{=} \det \left(A \cdot \tilde{A}\right) = \det\left((\det A)\, I\right) = (\det A)^n \det I = (\det A)^n$$

pa je $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$. Posebno je $\tilde{A}$ regularna ako je A regularna.
Nadalje,

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot \widetilde{\left(\tilde{A}\right)} &= \left(\det \tilde{A}\right) I = (\det A)^{n-1} I \quad / \cdot A \text{ (s lijeva)} \\ A \cdot \tilde{A} \cdot \widetilde{\left(\tilde{A}\right)} &= (\det A)^{n-1} A \\ \widetilde{\left(\tilde{A}\right)} &= (\det A)^{n-2} A. \end{aligned}$$

□

ZADATAK 4.20. Dokažite da je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ regularna i odredite A^{-1}.

RJEŠENJE Sjetimo se da je A regularna akko je $\det A \neq 0$. Ako $\det A$ razvijemo po trećem stupcu, odmah vidimo da je $\det A = 1 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

ZADATAK 4.21 (Posljedice Binet–Cauchyjevog teorema).

a) Za $A_1, A_2, \dots, A_r \in M_n(\mathbb{F})$, $r \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_r) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_r.$$

b) Za $A \in M_n(\mathbb{F})$ je $\det A^r = (\det A)^r$, $r \in \mathbb{N}$.

c) Za $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ je $\det AB = \det BA$.

d) Ako je $A \in O(n, \mathbb{F})$, onda je $\det A = \pm 1$.

e) Ako je $A \in U(n)$, onda je $|\det A| = 1$.

Rješenje

a) indukcijom po r

d) A je ortogonalna ako i samo ako je $AA^T = A^T A = I$ pa je

$$1 = \det I = \det\left(AA^T\right) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2.$$

e) A je unitarna ako i samo ako je $AA^* = A^* A = I$ pa je

$$1 = \det I = \det(AA^*) = \det A \cdot \det \overline{A^T} = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2.$$

Napomena 4.9. Tvrdnja za determinantu blok–trokutaste matrice indukcijom se proširuje i na proizvoljan broj blokova pa vrijedi:

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \det A_{11} \cdot \det A_{22} \cdots \det A_{nn} = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

pri čemu su A_{11}, A_{22}, $\dots$, A_{nn} kvadratni blokovi.

Zadatak 4.22. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ proizvoljna matrica. Nađite $\det \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}$.

Rješenje Iskoristimo tvrdnju o determinanti blok–trokutastih matrica i način na koji se množe blok–matrice. Vrijedi

$$\det \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det I \cdot \det I = 1.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \overset{BC}{=} \det \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

jer matrica $\begin{pmatrix} A & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix}$ ima nulstupac.

ZADATAK 4.23. Izračunajte $\det\begin{pmatrix} I & B \\ C & D\end{pmatrix}$, gdje je D kvadratna matrica.

RJEŠENJE Koristimo $\det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I\end{pmatrix} = \det I \cdot \det I = 1$ pa je

$$\det\begin{pmatrix} I & B \\ C & D\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I & B \\ C & D\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I\end{pmatrix} \overset{BC}{=} \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D-CB\end{pmatrix} = \det I\cdot\det(D-CB) = \det(D-CB).$$

□

DZ 4.22. Izračunajte $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & I\end{pmatrix}$, gdje je A kvadratna matrica.

RJEŠENJE Opet koristimo $\det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I\end{pmatrix} = 1$ pa je

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & I\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & I\end{pmatrix} \overset{BC}{=} \det\begin{pmatrix} A-BC & 0 \\ C & I\end{pmatrix} = \det(A-BC)\cdot\det I = \det(A-BC).$$

□

ZADATAK 4.24. Neka za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $AB = BA$ te neka je A regularna. Odredite $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$.

RJEŠENJE Sjetimo se da je A regularna akko je $\det A \neq 0$ i primijetimo da je $\det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A\end{pmatrix} = \det A$. Stoga je

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\cdot\det A\cdot\frac{1}{\det A} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\det A} \\ &\overset{BC}{=} \frac{1}{\det A}\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A\end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & DA-CB\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det A}\cdot\det A\cdot\det(DA-CB) = \det(DA-CB).\end{aligned}$$

□

DZ 4.23. Neka za matrice $A, C \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $AC = CA$ te neka je A regularna. Dokažite da je tada

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \det(AD-CB).$$

Uputa: $\det A = \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A\end{pmatrix} \neq 0$. Matricu $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ s lijeva množimo s $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A\end{pmatrix}$.

DZ 4.24. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B \in M_{nm}(\mathbb{F})$. Tada je

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

RJEŠENJE Krenimo od blok matrice

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n\end{pmatrix}.$$

Ovu ćemo matricu transformirati na dva načina: dodavanjem drugog stupca blokova pomnoženog s B prvom, te dodavanjem prvog stupca blokova pomnoženog s $-A$ drugom. Dakle, imamo

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + AB & A \\ 0 & I_n\end{pmatrix},$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n + BA \end{pmatrix}.$$

Kako je

$$\det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = 1,$$

primjenom determinante na prethodne dvije jednakosti te Binet-Cauchyjevog teorema slijedi

$$\begin{aligned} \det(I_m + AB) &= \det \begin{pmatrix} I_m + AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n + BA \end{pmatrix} \\ &= \det(I_n + BA). \end{aligned}$$

Poglavlje 5

Rang matrice

DEFINICIJA 5.1. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i neka su $S_1, \ldots, S_n \in M_{m1}(\mathbb{F})$ stupci od A. **Rang matrice** A definira se kao $\dim [\{S_1, \ldots, S_n\}]$. Oznaka $r(A)$.

ČINJENICE 5.2.

1. $r(A) \leq m, n$. Očito je $r(A) \leq n$, a $r(A) \leq m$ jer je $\dim M_{m1}(\mathbb{F}) = m$.
2. Riječima: Rang je broj linearno nezavisnih stupaca od A.
3. $r(A) = 0$ ako i samo ako je $A = 0$. $r(I_n) = n$.

ZADATAK 5.1. Odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE Stupci matrice A su $S_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $S_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $S_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Odmah se vidi da je $S_2 = -2S_1$ i S_1, S_3 su linearno nezavisni. Dakle, $r(A) = 2$. $\square$

Teorem 5.3. *Broj linearno nezavisnih redaka od $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ jednak je broju linearno nezavisnih stupaca, tj. "rang po retcima jednak je rangu po stupcima".*

ZADATAK 5.2. Utvrdite rang po retcima matrice A iz prethodnog zadatka.

RJEŠENJE Retci matrice A su $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $R_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $R_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Očito su R_1 i R_2 linearno nezavisni. Pretpostavimo da je $R_3 = \alpha R_1 + \beta R_2$. Tada je

$$\begin{aligned} -2 &= \alpha + 2\beta \\ 4 &= -2\alpha - 4\beta \\ 1 &= \alpha \end{aligned}$$

Rješenje je $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{3}{2}$ pa je $R_3 = R_1 - \frac{3}{2}R_2$. Dakle, $r(A) = 2$. $\square$

ČINJENICE 5.4.

1. Primjenom elementarnih transformacija rang matrice se ne mijenja.
2. Kažemo da je matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ekvivalentna matrici $B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ako se A može dobiti iz B primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka i stupaca. Pišemo $A \sim B$.
3. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $M_{mn}(\mathbb{F})$.
4. Za $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A \sim B$ povlači da je $r(A) = r(B)$.

5. Neka je $r = 0, 1, \ldots, \min\{m, n\}$. Matrica $D_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ (r jedinica) zove se **kanonska matrica tipa** $m \times n$ **ranga** r. Na primjer, sve matrice $D_r \in M_{23}(\mathbb{F})$ su

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Ako je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $r(A) = r$, onda je $A \sim D_r \in M_{mn}(\mathbb{F})$.

7. Za $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je $A \sim B$ ako i samo ako je $r(A) = r(B)$.

Zadatak 5.3. Odredite $r(A)$ iz Zadatka 5.1 primjenom elementarnih transformacija.

Rješenje

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D_2.$$

Dakle, $r(A) = 2$.

Zadatak 5.4. Odredite $r(A)$ za $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim D_3.$$

Dakle, $r(A) = 3$.

Zadatak 5.5. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ matrica ranga r. Dokažite da se A može prikazati kao zbroj r matrica ranga 1. (Uputa: Tvrdnju prvo dokažite za slučaj kada je A kanonska matrica ranga r.)

Rješenje Iz $r(A) = r$ slijedi da postoje regularne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da je $A = SD_rT$, pri čemu je $D_r \in M_{mn}$ kanonska matrica ranga r. Matricu D_r lako rastavimo na zbroj r matrica ranga 1: definiramo matrice $B_1, \ldots, B_r$ tako da matrica B_k ima 1 na mjestu (k, k) i sve ostalo nule. Tada je $D_r = B_1 + \ldots + B_r$, odakle je $A = SD_rT = SB_1T + \ldots + SB_rT$. Kako su S i T regularne matrice, vrijedi $r(SB_kT) = r(B_k) = 1$.

DZ 5.1. Odredite $r(A)$ za

1. $A = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

2. $A = \begin{bmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 2)$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 6 & 6 & 0 & 20 & 19 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

Zadatak 5.6. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite $r(A)$ za $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda - 12 & 0 & 6 & -15 \\ -20 & 0 & 10 & -25 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda - 12 & 0 & 6 & -15 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & \frac{13}{2} \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$r(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = 0 \\ 3, & \lambda \neq 0 \end{cases}.$$

□

DZ 5.2. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 2$ za $\lambda = 3$, inače je $r(A) = 3)$,

2. $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{bmatrix}$ $(r(A) = 2$ za $\lambda = 0$, inače je $r(A) = 3)$,

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3$ za sve $\lambda)$.

Zadatak 5.7. Neka su dani vektori $a_1, \dots, a_k, b \in \mathbb{F}^n$. Dokažite da je b jednak linearnoj kombinaciji vektora $a_1, \dots, a_k$ ako i samo ako je

$$r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & b \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{bmatrix}\right).$$

Rješenje

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je b jednak linearnoj kombinaciji vektora $a_1, \dots, a_k$. Tada je $b \in [\{a_1, \dots, a_k\}]$ pa je sigurno $[\{a_1, \dots, a_k\}] = [\{a_1, \dots, a_k, b\}]$. Zaista, uvijek je $[\{a_1, \dots, a_k\}] \leq [\{a_1, \dots, a_k, b\}]$, dok obratna inkluzija slijedi iz

$$\begin{aligned} x \in [\{a_1, \dots, a_k, b\}] \Rightarrow x &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \beta b, \text{ za } b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \beta \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta\lambda_i)\, a_i \\ &\Rightarrow x \in [\{a_1, \dots, a_k\}]\,. \end{aligned}$$

Vektore $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{F}^n$ možemo shvatiti kao stupce pa dobivamo matrice $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & b \end{bmatrix}$. Njihovi rangovi su po definiciji

$$r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{bmatrix}\right) = \dim [\{a_1, \dots, a_k\}] = \dim [\{a_1, \dots, a_k, b\}] = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & b \end{bmatrix}\right).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & b \end{bmatrix}\right)$. Tada je i $\dim [\{a_1, \dots, a_k\}] = \dim [\{a_1, \dots, a_k, b\}]$. Iz toga i činjenice da je $[\{a_1, \dots, a_k\}] \leq [\{a_1, \dots, a_k, b\}]$, slijedi da je $[\{a_1, \dots, a_k\}] = [\{a_1, \dots, a_k, b\}]$. Specijalno je $b \in [\{a_1, \dots, a_k\}]$, odnosno b je linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_k$.

Zadatak 5.8. Provjerite jesu li vektori $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$ linearno nezavisni.

Rješenje Vektori a_1, a_2, a_3 su linearno nezavisni ako i samo ako je $\dim [\{a_1, a_2, a_3\}] = 3$. Pogledajmo matricu $A = \begin{bmatrix} a_1^T & a_2^T & a_3^T \end{bmatrix}$ i odredimo njen rang.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -27 & -21 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -9 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ -9 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ -9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $r(A) = 2$ pa su a_1, a_2, a_3 linearno zavisni.

Zadatak 5.9.

1. Navedite primjer matrice $A \in M_n$, $A \neq 0$, takve da je njena adjunkta $\tilde{A}$ jednaka nulmatrici.

2. Što možete zaključiti o adjunkti matrice $A \in M_n$ čiji je rang jednak $n - 2$?

3. Neka je $A \in M_n$ i $B = 2A$. Koja je veza između njihovih adjunkti $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$?

Zadatak 5.10. U $\mathbb{R}^5$ zadani su potprostori M i N razapeti vektorima $M = [\{a_1, a_2, a_3\}]$, $a_1 = (1, 0, 2, 4, 7)$, $a_2 = (-4, 2, 8, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 0, 9)$, $N = [\{b_1, b_2, b_3\}]$, $b_1 = (2, 2, -1, 4, 9)$, $b_2 = (4, -4, 12, 1, 6)$, $b_3 = (1, 4, 1, 5, -5)$. Odredite $\dim M$, $\dim N$, $\dim(M + N)$, $\dim(M \cap N)$.

Rješenje Primijetimo da je $\dim M$ jednaka broju linearno nezavisnih vektora među vektorima a_1, a_2, a_3, a $\dim N$ je jednaka broju linearno nezavisnih vektora među vektorima b_1, b_2, b_3. Te vektore možemo shvatiti kao stupce nekih matrica pa su rangovi tih matrica jednaki dimenzijama odgovarajućih prostora.

$$M' := \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & -2 \\ 0 & 17 & -4 \\ 0 & 29 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(M') = 3$, tj. $\dim M = 3$.

$$N' := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 12 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -6 & -20 & 0 \\ -3 & 8 & 0 \\ -6 & -19 & 0 \\ 19 & 26 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \\ -\frac{27}{5} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(N') = 3$, tj. $\dim N = 3$.
$M + N = [\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}]$ pa gledamo matricu

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & 8 & 0 & -1 & 12 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 9 & 9 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 16 & -2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 17 & -4 & -4 & -15 & 1 \\ 0 & 29 & 2 & -5 & -22 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 20 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 25 & 0 & 4 & -31 & 17 \\ 0 & 25 & 0 & -9 & -14 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 42 & 1 & 0 & -12 & 18 \\ 0 & 20 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -47 & 45 \\ 0 & -155 & 0 & 0 & 22 & -83 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -47 & 45 \\ 0 & -155 & 0 & 0 & 22 & -83 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105 & -47 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & -155 & 22 & -83 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105 & -47 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{995}{21} & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{995}{21} & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $r(X) = 5$ pa je $\dim M + N = 5$. Konačno je

$$\dim(M \cap N) = \dim M + \dim N - \dim(M + N) = 3 + 3 - 5 = 1.$$

□

Zadatak 5.11. Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (7, -2, \lambda)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (3,7,8)$, $a_3 = (1,-6,1)$?

Rješenje Zadatak 5.7 kaže da je b linearna kombinacija vektora a_1, a_2, a_3 ako i samo ako je $r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}$. Odredimo najprije $r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 15 & 25 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(A) = 2$.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 15 & 25 & 0 & 40 \\ 3 & 5 & 0 & \lambda - 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 0 & \lambda - 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 15 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 15 \end{bmatrix}.$$

Očito je $r(\tilde{A}) = 2$ ako i samo ako je $\lambda = 15$.

DZ 5.3. Neka je $A \in M_{mp}(\mathbb{F})$ te $B \in M_{pn}(\mathbb{F})$. Tada je $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

Rješenje Označimo s $S_1, \ldots, S_n$ stupce matrice B, te s r rang matrice B. U slučaju $r = 0$, tj. $B = 0$, tvrdnja zadatka trivijalno slijedi. Za $r \geq 1$, BSO pretpostavimo da je upravo prvih r stupaca matrice B, $\{S_1, \ldots, S_r\}$, linearno nezavisno. Pokažimo prvo da je $r(AB) \leq r(B)$. Stupčana reprezentacija matrice AB dana je skupom $\{AS_1, \ldots, AS_n\}$, pa koristeći pretpostavku za stupce matrice B slijedi da postoje odgovarajući skalari takvi da vrijedi

$$AS_k = A\Big(\sum_{j=1}^{r} \lambda_{kj} S_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{kj}(AS_j), \quad k = r+1, \ldots, n,$$

odakle vidimo da se stupci $AS_{r+1}, \ldots, AS_n$ mogu prikazati preko prvih r, što daje željenu nejednakost. Druga nejednakost slijedi iz prethodno dokazane i činjenice da se transponiranjem rang ne mijenja:

$$r(AB) = r((AB)^T) = r(B^T A^T) \leq r(A^T) = r(A).$$

DZ 5.4. Neka je $A \in M_m(\mathbb{F})$ regularna matrica. Tada za svaku matricu $B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ vrijedi $r(AB) = r(B)$.

Rješenje Iz prethodnog zadatka slijedi $r(AB) \leq r(B)$. S druge strane, kako je A regularna, postoji A^{-1}, pa još jednom koristeći prethodni zadatak slijedi

$$r(B) = r(IB) = r((A^{-1}A)B) = r(A^{-1}(AB)) \leq r(AB).$$

Zadatak 5.12. Odredite rang matrice A ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Rješenje

Zadatak 5.13. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A \neq 0$, proizvoljna fiksna matrica. Definiramo preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = r(tA)$. Dokažite da φ nije neprekidno preslikavanje.

Rješenje Za $t = 0$ je $\varphi(tA) = \varphi(0) = 0$.
Neka je $t \neq 0$. Tada je $tA \neq 0$ pa je $r(tA) \geq 1$ (zapravo je $r(tA) = r(A)$). Stoga φ ima prekid u $t = 0$. □

DZ 5.5. Ispitajte linearnu nezavisnost vektora $b_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $b_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $b_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $b_4 = (2, -3, 4, 11, 1)$.

DZ 5.6. Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (5, 9, \lambda)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$? (rj: $\lambda \in \mathbb{R}$)

DZ 5.7. Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (\lambda, 2, 5)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (3, 2, 6)$, $a_2 = (7, 3, 9)$, $a_3 = (5, 1, 3)$? (rj: takav λ ne postoji)

DZ 5.8. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, pri čemu je $m > n$. Dokažite: $A^T A$ je regularna akko $r(A) = n$.

Poglavlje 6

Inverz

Činjenice 6.1. 1. **Elementarne matrice** n–tog reda su

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&& \\ && \ddots &&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&& \\ &&&& 0 & \dots & 1 &&& \\ &&&& \vdots & \ddots & \vdots &&& \\ &&&& 1 & \dots & 0 &&& \\ &&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}, \quad i,j = 1,\dots,n,\ i \neq j$$

$$F_i^{\lambda} = \mathrm{diag}(1,\dots,1, \underbrace{\lambda}_{i\text{–to mjesto}}, 1,\dots,1)$$

$$F_{ij}^{\lambda} = I + \lambda E_{ij}.$$

Množenjem matrice A s elementarnim matricama s lijeve odnosno desne strane realiziraju se elementarne transformacije redaka odnosno stupaca matrice A. Preciznije

(i) zamjena i–tog i j–tog retka (stupca): $F_{ij}A$ (AF_{ij}),

(ii) množenje i–tog retka (stupca) skalarom $\lambda \neq 0$: $F_i^{\lambda}A$ (AF_i^{λ}),

(iii) pribrajanje j–tog retka (i–tog stupca) pomnoženog s λ i–tom retku (j–tom stupcu): $F_{ij}^{\lambda}A$ (AF_{ij}^{λ}).

2. Sve elementarne matrice su regularne i vrijedi

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij}, \quad (F_i^{\lambda})^{-1} = F_i^{\lambda^{-1}}, \quad F_{ij,\lambda}^{-1} = F_{ij,-\lambda}.$$

3. $A \in M_n(\mathbb{F})$ je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$

4. $A \in M_n(\mathbb{F})$ je regularna ako i samo ako je A produkt (konačnog broja) elementarnih matrica $A = E_k \cdots E_1 I F_1 \cdots F_l$ ($D_n = I$).

5. $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ su ekvivalentne ako i samo ako postoje regularne matrice $S \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{F})$, $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ takve da je $B = SAT$.

Zadatak 6.1. Regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ možemo elementarnim transformacijama samo po retcima svesti na matricu I.

Rješenje A je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$, tj. A ima sve stupce linearno nezavisne. Specijalno, nema nijedan nul–stupac.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Kako } A \text{ nema nulstupac, u prvom stupcu postoji element } a_{i1} \neq 0. \\ \text{Dovedimo ga na mjesto } (1,1) \text{ zamjenom 1. i } i\text{–tog retka}\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Elementom } a_{i1} \text{ poništimo prvi stupac.} \\ \text{Dobijemo matricu } A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right) \text{ koja ima rang } n\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Prvi i drugi stupac matrice } A_2 \text{ nisu linearno zavisni pa postoji} \\ \text{indeks } i_2 \geq 2 \text{ takav da je } a_{i_2 2} \neq 0. \text{ Zamijenimo } i_2\text{–ti i 2. redak} \\ \text{i poništimo drugi stupac u } A_2 \text{ s elementom } a_{i_2 2}.\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & \dots & a_{1n}^{(3)} \\ 0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Postupak nastavljamo dok ne dođemo} \\ \text{do dijagonalne matrice}\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(n)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \sim i\text{–ti redak pomnožimo s } \left(a_{ii}^{(n)}\right)^{-1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I$$

Napomena 6.2. Elementarne transformacije nad retcima realiziramo množenjem matrice A s lijeva elementarnim matricama. Prema tome, za svaku regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ postoje elementarne matrice $S_1, \dots, S_n$ takve da je $I = S_n \cdots S_1 A$. Zbog jedinstvenosti inverza je

$$A^{-1} = S_n \cdots S_1.$$

Napišemo li zadnji izraz kao $A^{-1} = S_n \cdots S_1 I$, dobivamo metodu za invertiranje matrica: istovremeno elementarnim transformacijama nad A i I iz A dobivamo I, a iz I dobivamo A^{-1}. Dakle,

$$\left(A \;\vdots\; I \right) \sim \cdots \sim \left(I \;\vdots\; A^{-1} \right).$$

Zadatak 6.2. Odredite inverz od $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje

$$\left(A \,\vdots\, I \right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(I \,\vdots\, A^{-1} \right).$$

Dakle, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. □

Napomena 6.3. Posve analogno možemo dokazati da provođenjem elementarnih transformacija nad stupcima regularne matrice A možemo doći do jedinične matrice I. Elementarne transformacije nad stupcima realiziraju se množenjem zdesna elementarnim matricama. Dakle, postoje elementarne matrice $F_1, \ldots, F_k$ takve da je $AF_1F_2 \cdots F_k = I$ pa je

$$A^{-1} = F_1F_2 \cdots F_k = IF_1F_2 \cdots F_k.$$

Stoga A^{-1} dobivamo iz I istim elementarnim transformacijama nad stupcima koje A prevode u I.

Zadatak 6.3. Odredite inverz od $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ elementarnim transformacijama nad stupcima.

Rješenje

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hdashline I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} I \\ \hdashline A^{-1} \end{array}\right).$$

□

Zadatak 6.4. Kako se mijenja inverz ako matrici A:

(a) zamijenimo i–ti i j–ti redak?

(b) i–ti redak pomnožimo s $\lambda \neq 0$?

(c) i–ti redak pomnožen s λ dodamo j–tom retku?

Rješenje

(a) $(F_{ij}A)^{-1} = A^{-1}F_{ij}^{-1} = A^{-1}F_{ij}$,

(b) $\left(F_i^{\lambda}A\right)^{-1} = A^{-1}(F_i^{\lambda})^{-1} = A^{-1}F_i^{\frac{1}{\lambda}}$,

(c) $\left(F_{ji}^{\lambda}A\right)^{-1} = A^{-1}{F_{ji}^{\lambda}}^{-1} = A^{-1}F_{ji}^{-\lambda}$.

□

DZ 6.1. Kako se mijenja inverz ako matrici A:

(a) zamijenimo i–ti i j–ti stupac?

(b) i–ti stupac pomnožimo s $\lambda \neq 0$?

(c) i–ti stupac pomnožen s λ dodamo j–tom stupcu?

DZ 6.2. Odredite inverz sljedećim matricama:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = (\alpha_{ij}), \alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ 1, & i = j \\ (-1)^{i+j}, & i < j \end{cases}.$$

6.1 LU faktorizacija

Činjenice 6.4. 1. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ matrica koja se elementarnim transformacijama po retcima, ali bez zamjene redaka, može dovesti do gornjetrokutaste matrice. Tada postoje matrice $L, U \in M_n(\mathbb{F})$, pri čemu je L donjetrokutasta s jedinicama na glavnoj dijagonali, a U gornjetrokutasta, takve da vrijedi

$$A = LU.$$

2. Ako matrica A pri prevođenju na gornjetrokutastu matricu zahtijeva zamjenu redaka, to možemo načiniti unaprijed: neka je PA matrica koja ne zahtijeva zamjenu redaka, gdje je P permutacijska matrica nad retcima. Tada vrijedi

$$PA = LU.$$

3. Postupak je sljedeći: matricu A svodimo do gornjetrokutaste matrice koristeći samo elementarne transformacije u kojima redak pomnožen s λ dodajemo retcima ispod njega. Neka su $E_1, \dots, E_p$ elementarne matrice koje realiziraju te transformacije (one su sve oblike $F_{ij,\lambda}$ za $i > j$). Tada je
$$E_p \cdots E_1 A = U \text{ (gornjetrokutasta).}$$
Primijetimo da su $E_1, \dots, E_p$ donjetrokutaste matrice s jedinicama na dijagonali pa je takav i njihov produkt i inverz tog produkta (inverz postoji jer su elementarne matrice regularne). Imamo
$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U =: LU.$$

DZ 6.3. Dokažite:

(a) produkt dvije donjetrokutaste matrice s jedinicama na glavnoj dijagonali je donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali.

(b) inverz donjetrokutaste matrice s jedinicama na glavnoj dijagonali je donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali.

Sljedeći primjer pokazuje kako u praksi odrediti matrice L i U za zadanu matricu A.

Primjer 6.5.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ -6 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -3 & -4 \\ 0 & 12 & 4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U$$

Od stupaca $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix}$ "normiranih" tako da su na dijagonali 1, stvaramo L:
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Očito se iz L istim elementarnim transformacijama nad retcima dobiva I. Pritom vrijedi $A = LU$.

Zadatak 6.5. Odredite LU–faktorizaciju matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U.$$

Stupci $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$ određuju $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Provjera:
$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

NAPOMENA 6.6. *LU* faktorizaciju (među ostalim) koristimo pri rješavanju sustava $Ax = b$. Taj sustav možemo zapisati kao $L(Ux) = b$. Ako uvedemo supstituciju $y = Ux$, onda se rješavanje polaznog sustava svodi na rješavanje sustava

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases},$$

pri čemu su L, U trokutaste matrice.

ZADATAK 6.6. Riješite sustav $Ax = b$, gdje je A iz zadatka 6.5, a $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

RJEŠENJE Najprije riješimo sustav $Ly = b$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} y_1 &= -7 \\ -y_1 + y_2 &= 5 \\ 2y_1 - 5y_2 + y_3 &= 2 \end{aligned}$$

čije rješenje je $y = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Sada možemo riješiti sustav $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= -7 \\ -2x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_3 &= 6 \end{aligned}$$

čije rješenje je $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

NAPOMENA 6.7. LU faktorizacija matrice ne mora biti jedinstvena. Na primjer,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

DZ 6.4. Dokažite da regularna matrica (koja pri svođenju na gornjetrokutastu matricu ne zahtijeva zamjene redaka) ima jedinstvenu LU faktorizaciju.

Napomena 6.8. Složenost LU faktorizacije je $O(N^3)$, isto kao i složenost Gaussove metode eliminacije za rješavanje sustava. Stoga se postavlja pitanje koja je prednost LU faktorizacije. Do prednosti dolazi kad moramo više puta rješavati sustav koji ima istu matricu koeficijenta, ali različite slobodne koeficijente. Naime, ako imamo faktoriziranu matricu koeficijenata, samo moramo napraviti supstitucije unaprijed i unazad da bismo riješili sustav. Ta operacija ima složenost $O(N^2)$. Ako je moramo ponoviti k puta, Gaussova eliminacija bi nam dala ukupnu složenost $O(kN^3)$, a pristup preko LU faktorizacije $O(N^3+kN^2)$ jer moramo faktorizaciju napraviti samo jednom, a onda k puta supstitucije.
Možda bismo na prvu pomislili da je prostorna složenost Gaussove metode bolja jer radimo samo s jednom matricom, a kod LU faktorizacije imamo dvije matrice iste veličine. No, znamo da je L donjetrokutasta i U gornjetrokutasta pa kod L moramo samo pamtiti (strogi) donji trokut (jedinice su na dijagonali i to ne moramo spremiti u memoriju), a kod U moramo pamtiti samo gornji trokut. Dakle, pamtimo isti broj elemenata kao i kod A.

Poglavlje 7

Sustavi linearnih jednadžbi

ČINJENICE 7.1. 1. Opći sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{F}$ je

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Skalari a_{ij} se zovu **koeficijenti sustava**, a $b_1, \ldots, b_m$ **slobodni koeficijenti**. **Rješenje sustava** je svaka uređena n–torka $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ za koju supstitucija $x_1 = \gamma_1, \ldots, x_n = \gamma_n$ zadovoljava sve jednakosti.

2. Matrični zapis sustava dan je s $AX = B$, gdje je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Prirodna identifikacija $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ je bijekcija skupa svih rješenja sustava na skup rješenja matrične jednadžbe.

3. Kod sustava nas zanimaju tri stvari:

   (1) Kada je sustav rješiv?

   (2) Opisati rješenje!

   (3) Naći metodu rješavanja!

   U nastavku ćemo odgovoriti na svaku od prethodnih točaka:

   (1)

TEOREM 7.2 (Kronecker–Capelli). *Sustav je rješiv ako i samo ako je $r(A) = r(A_p)$, gdje je*

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

KOROLAR 7.3. *Svaki homogen sustav $AX = 0$ je rješiv.*

(2) Skup svih rješenja homogenog sustava $AX = 0$ je vektorski prostor. Skup svih rješenja nehomogenog sustava $AX = B$ je linearna mnogostrukost

$$C_0 + \Omega = \{C_0 + C : C \in \Omega\},$$

gdje je C_0 bilo koje rješenje sustava $AX = B$, a Ω je prostor rješenja pridruženog homogenog sustava $AX = 0$.

Ako je $\{C_1, \dots, C_d\}$ baza za Ω (tzv. **fundamentalni skup rješenja**), tada je svako rješenje sustava $AX = B$ oblika

$$C_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i C_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{F}.$$

Pritom vrijedi $d = n - r$, gdje je $r = r(A)$.

(3) Metoda: Gaussova metoda eliminacije. Elementarnim transformacijama nad <u>retcima</u> matricu A_p svodimo na

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccccccc:c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{r,n} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Naime **nekih** r stupaca se može elementarnim transformacijama redaka dovesti do oblika kakav ima prvih r stupaca u gornjoj matrici. Naša pretpostavka kako je to slučaj upravo s prvih r stupaca ne predstavlja smanjenje općenitosti.

Ako je sustav rješiv, u zadnjem stupcu na mjestima $r + 1, \dots, m$ su nule. Vidimo da je jedno partikularno rješenje dano s

$$C_0 = (b'_1, \dots, b'_r, 0, \dots, 0).$$

Treba još naći bazu prostora rješenja pripadnog homogenog sustava. Iščitavamo je iz gornje matrice (uz $b'_1 = \dots = b'_r = 0$).

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(-a'_{1,r+1}, -a'_{2,r+1}, \dots, -a'_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0\right) \\ C_2 &= \left(-a'_{1,r+2}, -a'_{2,r+2}, \dots, -a'_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0\right) \\ &\vdots \\ C_{n-r} &= \left(-a'_{1,n}, -a'_{2,n}, \dots, -a'_{r,n}, 0, 0, \dots, 1\right). \end{aligned}$$

ZADATAK 7.1. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ matrica ranga r. Ako za matricu $B \in M_{np}(\mathbb{R})$ vrijedi $AB = 0$, dokažite da je $r(B) \leq n - r$.
(Uputa: Promatrajte stupce matrice B.)

RJEŠENJE Neka su $S_1, \ldots, S_p$ stupci matrice B. Iz $AB = 0$ slijedi $AS_1 = \ldots = AS_n = 0$, pa su stupci matrice B rješenja homogenog sustava $AX = 0$, dakle, pripadaju prostoru $\Omega = \{X \in M_{n1} : AX = 0\}$. Odavde slijedi $r(B) = \dim[\{S_1, \ldots, S_n\}] \leq \dim \Omega = n - r$. □

7.1 Cramerov sustav

Sustav je **Cramerov** ako je $m = n$ i matrica sustava A je regularna ($\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$). Cramerov sustav je uvijek rješiv i rješenje mu je $C = A^{-1}B$. Rješenje Cramerovog sustava možemo dobiti i kao

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je $D = \det A$, a D_i je determinanta matrice u kojoj je i–ti stupac B, a ostali su isti kao u matrici A.

ZADATAK 7.2. Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 + \ 3x_3 + \ 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + \ 5x_2 + \ 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$$

RJEŠENJE

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tj. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. □

ZADATAK 7.3. Neka je $n \geq 2$ i $A \in M_n$ regularna matrica. Za koji $B \in M_{n1}$ će rješenje sustava $AX = B$ biti jednako drugom stupcu matrice A^{-1}? Na ovaj način (bez računanja čitave matrice A^{-1}) odredite drugi stupac od A^{-1}, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje ...

Zadatak 7.4. Riješite sustav

$$\begin{cases} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 = 84 \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 = 72 \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 = 59 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 105 & -175 & -315 & 245 & 84 \\ 90 & -150 & -270 & 210 & 72 \\ 75 & -125 & -225 & 175 & 59 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{12}{5} \\ 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{12}{5} \\ 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{59}{25} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{25} \end{array}\right).$$

Primijetimo da je $r(A) \neq r(A_p)$ pa sustav nema rješenja.

Zadatak 7.5. Riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -13 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & -58 & -14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 29 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zadatak 7.6. Riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 2 & -25 & -27 \\ 0 & 4 & -50 & -54 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 2 & -25 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posljednji sustav možemo zapisati kao

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - x_4 = 0 \\ \qquad x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

odakle slijedi $x_1 = x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = -x_4$. Stavimo $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$, pa je rješenje

$$x = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 7.7. Riješite sustav

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zadnji sustav možemo zapisati kao

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\qquad = 2 \\ \quad\; - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

što daje $x_1 = 2 + x_2$, $x_3 = 3 + x_2 - 2x_4$. Ako stavimo $x_2 = t$, $x_4 = s$, za $t, s \in \mathbb{R}$, rješenje možemo zapisati kao

$$x = \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 3+t-2s \\ s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{partikularno rješenje} \\ \text{sustava}}} + \underbrace{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{opće rješenje} \\ \text{pripadnog homogenog sustava}}}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

DZ 7.1. Riješite sustave

(a)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

7.2 Sustavi u ovisnosti o parametru

ZADATAK 7.8. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + \lambda x_4 = 3 \\ x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

RJEŠENJE

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\lambda-4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Jedini preostali pivotni element je $-\lambda^2 - \lambda$ pa razlikujemo slučajeve:

1.) $-\lambda^2 - \lambda = 0$, tj. $\lambda \in \{0, -1\}$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\lambda-4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

tj. $x_1 - (\lambda + 4)x_3 = 2$, $x_2 - 3x_3 = 1$, $(\lambda + 3)x_3 + x_4 = 0$. Stavimo $x_3 = t$ pa dobivamo

$$x = \begin{pmatrix} 2 + (\lambda+4)t \\ 1 + 3t \\ t \\ -(\lambda+3)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \lambda+4 \\ 3 \\ 1 \\ -(\lambda+3) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.) $-\lambda^2 - \lambda \neq 0$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\lambda-4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

pa imamo Cramerov sustav koji ima jedinstveno rješenje $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

□

ZADATAK 7.9. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav

$$\begin{cases} (\lambda+4)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda+4)y + z = \lambda+3 \\ x + y + (\lambda+4)z = (\lambda+3)^2 \end{cases}$$

RJEŠENJE

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+4 & 1 & \lambda+3 \\ 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \\ \lambda+4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+4 & 1 & \lambda+3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \\ 0 & -(\lambda+3) & -(\lambda+3)(\lambda+5) & 1-(\lambda+4)(\lambda+3)^2 \\ 0 & \lambda+3 & -(\lambda+3) & -(\lambda+3)(\lambda+2) \end{array}\right)$$

Razlikujemo slučajeve

1.) $\lambda+3=0$, tj. $\lambda=-3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

odakle slijedi da sustav nema rješenja.

2.) $\lambda \neq -3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \\ 0 & -1 & -(\lambda+5) & \frac{1}{\lambda+3}-(\lambda+4)(\lambda+3) \\ 0 & 1 & -1 & -(\lambda+2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{\lambda+3}-(\lambda+3) \\ 0 & 1 & \lambda+5 & (\lambda+4)(\lambda+3)-\frac{1}{\lambda+3} \\ 0 & 0 & -(\lambda+6) & \frac{1}{\lambda+3}-(\lambda^2+8\lambda+14) \end{array}\right)$$

Diskutiramo slučajeve po $\lambda+6$

a) $\lambda+6=0$, tj. $\lambda=-6$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{array}\right)$$

pa sustav nema rješenja.

b) $\lambda \neq -6$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{\lambda+3}-(\lambda+3) \\ 0 & 1 & \lambda+5 & (\lambda+4)(\lambda+3)-\frac{1}{\lambda+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^2+8\lambda+14}{\lambda+6}-\frac{1}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2+6\lambda+7}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\lambda+5}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^3+11\lambda^2+38\lambda+41}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \end{array}\right).$$

Sustav je Cramerov i njegovo (jedinstveno) rješenje je

$$x = \frac{1}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \begin{pmatrix} -(\lambda^2+6\lambda+7) \\ 2\lambda+5 \\ \lambda^3+11\lambda^2+38\lambda+41 \end{pmatrix}.$$

$\square$

ZADATAK 7.10. Odredite polinom 3. stupnja koji prolazi točkama $(1,-2)$, $(2,-4)$, $(3,-2)$ i $(4,10)$.
RJEŠENJE Tražimo polinom oblika $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Uvrštavanjem danih točaka, dobivamo sustav

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -4 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -2 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 10 \end{cases}$$

Determinanta ovog sustava je transponirana Vandermondeova determinanta, a znamo da je ona $\neq 0$ ako i samo ako su brojevi koji je definiraju međusobno različiti, što je ovdje slučaj. Dakle, naš sustav je Cramerov i ima jedinstveno rješenje. Možemo ga riješiti ili pomoću determinanti ili putem Gaussove metode eliminacije. Rješenje je $a_0 = -2$, $a_1 = 3$, $a_2 = -4$, $a_3 = 1$, tj. traženi polinom je $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$.

DZ 7.2. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustave

(a)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases},$$

(b)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases},$$

(c)
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases},$$

(d)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9 \end{cases},$$

RJEŠENJE

(a) Za $\lambda = 8$ imamo rješenje

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Za $\lambda = 0$ nema rješenja. Za $\lambda \neq 0$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4-\lambda}{5\lambda} \\ \frac{9\lambda-16}{5\lambda} \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Za $\lambda \neq 1, -3$ sustav ima jedinstveno rješenje $x = \frac{1}{\lambda+3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Za $\lambda = 1$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda = -3$ nema rješenja.

(d) Za $\lambda = 8$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$