LINEARNA ALGEBRA 2

Treći ispitni rok – 27. kolovoza 2024.

Dopušteno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.

1. (20 bodova) Odredite sve realne brojeve λ takve da je preslikavanje $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dano sa

$$s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lambda x_1 y_1 + (\lambda^2 - 1)x_1 y_2 + (\lambda + 1)x_2 y_1 + \lambda^3 x_2 y_2$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$ i ortonormirajte skup vektora $\{(1, 2), (0, 1)\}$ s obzirom na taj skalarni produkt/te skalarne produkte.

2. (20 bodova) U unitarnom prostoru $M_3(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom dan je potprostor $M = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : XA = X\}$, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite $M^{\perp}$. Odredite ortogonalnu projekciju vektora

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

na potprostor M.

3. (20 bodova) Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ neka ortonormirana baza za $V^3(O)$. Operator $T : V^3(O) \to V^3(O)$ zrcali vektor u odnosu na pravac razapet vektorom $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, a zatim ga projicira na xz-ravninu.

   a) (14 bodova) Odredite matrični prikaz operatora T u bazi $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

   b) (6 boda) Odredite djelovanje linearnog operatora T na proizvoljnom vektoru, tj. odredite $T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$. Nalazi li se vektor $\vec{c} = 2\vec{j}$ u jezgri ovog operatora?

4. (20 bodova) Zadan je linearni operator $A : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$,

$$A(a_1 + a_2 t + a_3 t^2) = a_1 + (a_1 + 2a_2)t + (a_1 + a_2 + a_3)t^2.$$

   a) (5 bodova) Odredite matrični prikaz operatora A u bazi $(e') = \{1 + t^2, t^2, 1 - t\}$.

   b) (15 bodova) Je li operator A dijagonalizabilan? Ako je, odredite neku bazu u kojoj se A dijagonalizira. Je li ta baza jedinstvena?

5. a) (14 bodova) Napišite potpuni iskaz teorema o rangu i defektu. Dokažite taj teorem u posebnom slučaju za linearni operator ranga 2 na vektorskom prostoru dimenzije 4.

   b) (6 bodova) Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}_2$, $(g) = \{(1, 1), (1, 2)\}$. Postoji li baza (f) za $\mathbb{R}^2$ takva da je

$$[I]_{(e,f)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \ [I]_{(f,g)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}?$$

   Ako postoji, navedite jednu takvu bazu. Ako ne postoji, obrazložite zašto ne postoji.