LA2 2022./2023. Prva domaća zadaća

1. Dokažite da je s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_3)$$

zadan jedan linearan operator s $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}^3$, odredite mu jednu bazu jezgre, te rang i defekt.

2. Odredite opću formulu po kojoj djeluje operator $A \in L(\mathbb{R}^3, M_2(\mathbb{R}))$ koji vektore kanonske baze prostora $\mathbb{R}^3$ prevodi, redom, u matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Odredite, nadalje, jednu bazu potprostora $\mathrm{Im}A$ te rang i defekt operatora A.

3. Neka je $A \in L(V, W)$ i $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$. Dokažite: ako je skup $\{Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_k\}$ nezavisan, onda je i skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ nezavisan.

4. Neka je $A \in M_n$. Definirajmo operator $L_A : M_n \to M_n$ formulom $L_A(T) = AT$. Dokažite da je L_A regularan (tj. bijektivan) operator ako i samo ako je A regularna matrica.

5. Neka je V konačnodimenzionalan netrivijalan prostor te neka su f_1 i f_2 linearno nezavisni funkcionali na V. Dokažite da su im tada jezgre različite.