MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 1

(5 bodova) Dane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ iz $M_2(\mathbb{R})$, te preslikavanje:

$$f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad f(X) = AXB.$$

Pokažite da je f linearno preslikavanje, te odredite rang, defekt i po jednu bazu za sliku i jezgru.

Rješenje. Za $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo
$f(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X + \beta Y)B = \alpha AXB + \beta AYB = \alpha f(X) + \beta f(Y)$,
pa je f linearan operator.
Za $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d \\ c+d & c+d \end{bmatrix}$$

$$f(X) = 0 \Leftrightarrow \quad a+b+c+d = 0, \quad c+d = 0.$$

$$\text{Ker } A = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

Imamo $d(A) = 2 \Rightarrow r(A) = 4 - d(A) = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{bmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d \\ c+d & c+d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Im } A = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 2

(a) (4 boda) Dani su polinomi $p_1(x) = x^2 - 3x + 2$, $p_2(x) = -x^2 + 2x$, $p_3(x) = x^2 - x$ koji čine bazu za $\mathcal{P}_2 = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ polinom i } \operatorname{st} p \leq 2\}$. Odredite dualnu bazu bazi $\{p_1, p_2, p_3\}$.

(b) (1 bod) Postoji li linearni funkcional f^* u dualnom prostoru $(\mathcal{P}_2)^*$ takav da vrijedi $f^*(1 - x) = 1$, $f^*(x - x^2) = 2$, $f^*(x^2 - 1) = 3$? Odgovor obrazložite.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 3

(a) (4 boda) Zadani su linearni operatori $A : \mathcal{P}_2 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ i $B : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3$ s

$$A(p) = \begin{bmatrix} p(1) & 0 \\ p'(2) & p(0) \end{bmatrix},\ B\left(\begin{bmatrix} a-b+c-3d & b-2c+5d \\ c-3d & d \end{bmatrix}\right) = a+bt+ct^2+dt^3,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Odredite matrični prikaz linearnog operatora $B \circ A$ u paru baza $(e) = (1, t, t^2), (f) = (1, t, t^2, t^3)$. ($\mathcal{P}_n$ je oznaka za vektorski prostor polinoma s realnim koeficijentima čiji je stupanj manji ili jednak n).

(b) (1 bod) Matrični prikaz linearnog operatora $C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ u kanonskoj bazi za $\mathbb{R}^2$ je zadan s

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Postoje li $x, y \in \mathbb{R}$ i baza (f) za $\mathbb{R}^2$ takvi da je matrični prikaz linearnog operatora C u bazi (f) matrica

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}?$$

Obrazložite odgovor.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 4

(a) (3 boda) Odredite sve $k \in \mathbb{R}$ za koje se linearni operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan s

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & k \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati.

(b) (2 boda) Odredite matrični prikaz od A^{10} u kanonskoj bazi za $k = 1$.

Rješenje:

a) Računamo karakteristični polinom: $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \cdots = (2-\lambda)(3-\lambda)(k-\lambda)$. Imamo tri slučaja:

- $k \neq 2, 3$

  Vrijedi $a(2) = a(3) = a(k) = 1$. Nadalje, imamo $1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda)$, pa slijedi $g(2) = g(3) = g(k) = 1$. Dakle, $a(2) = g(2) = 1$, $a(3) = g(3) = 1$ te $a(k) = g(k) = 1$, pa je matrica dijagonalizabilna.

- $k = 3$

  Vrijedi $a(2) = 1$ te $a(3) = 2$. Nadalje, imamo $a(2) = g(2) = 1$. Računamo $g(3)$. Rješavamo sustav:

  $$(A - 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

  iz čega dobivamo

  $$V_A(3) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

  Dakle, $g(3) = 2$, pa imamo $a(2) = g(2) = 1$ te $a(3) = g(3) = 2$ te se matrica može dijagonalizirati.

- $k = 2$

  Vrijedi $a(3) = g(3) = 1$ te $a(2) = 2$. Računamo $g(2)$. Rješavamo sustav:

$$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

  iz čega dobivamo

$$V_A(2) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

  Dakle, $g(2) = 1 < a(2) = 2$, pa se u ovom slučaju A ne može dijagonalizirati.

Matrica se može dijagonalizirati za $k \neq 2$.

b) Određujemo prikaz od A^{10} u kanonskoj bazi za

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom je jednak $k_A(\lambda) = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda)$, pa je $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$.

- $\lambda = 1$. Rješavamo sustav:

$$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0,$$

  pa slijedi

$$V_A(1) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

- $\lambda = 2$. Rješavamo sustav:

$$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v = 0,$$

  pa slijedi

$$V_A(3) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

- $\lambda = 3$. Rješavamo sustav:

$$(A - 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} v = 0,$$

pa slijedi

$$V_A(3) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

Sada imamo:

$$A(e) = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned} A^{10}(e) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 2^{10} - 1 \\ 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{bmatrix} \end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 5

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ netrivijalan ($A \neq 0$) singularan operator.

(a) (3 boda) Dokažite da postoji operator $B \in L(V)$, $B \neq 0$, sa svojstvom $AB = 0$. Koji je najveći mogući rang linearnog operatora $B \neq 0$ s navedenim svojstvom? Konstruirajte B za koji se taj najveći rang postiže.

(b) (3 boda) Dokažite da postoji operator $C \in L(V)$, $C \neq 0$, sa svojstvom $CA = 0$. Koji je najveći mogući rang linearnog operatora $C \neq 0$ s navedenim svojstvom? Konstruirajte C za koji se taj najveći rang postiže.

MATIČNI BROJ STUDENTA

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 1

(5 bodova) Dane su matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ iz $M_2(\mathbb{R})$, te preslikavanje:

$$f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \quad f(X) = CXD.$$

Pokažite da je f linearno preslikavanje, te odredite rang, defekt i po jednu bazu za sliku i jezgru.

Rješenje. Za $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo

$f(\alpha X + \beta Y) = C(\alpha X + \beta Y)D = \alpha CXD + \beta CYD = \alpha f(X) + \beta f(Y)$,

pa je f linearan operator.

Za $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c+d & b+d \\ a+b+c+d & b+d \end{bmatrix}$$

$f(X) = 0 \Leftrightarrow \quad a+b+c+d = 0, \quad c+d = 0.$

$$\text{Ker } A = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

Imamo $d(A) = 2 \Rightarrow r(A) = 4 - d(A) = 4 - 2 = 2.$

$$\begin{bmatrix} a+b+c+d & b+d \\ a+b+c+d & b+d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Im } A = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 2

(a) (4 boda) Dani su polinomi $p_1 = 2x^2 + 1, p_2 = x + 1, p_3 = 2x^2 - x + 1$ koji čine bazu za $\mathcal{P}_2 = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ polinom i } \operatorname{st} p \leq 2\}$. Odredite dualnu bazu bazi $\{p_1, p_2, p_3\}$.

(b) (1 bod) Postoji li linearni funkcional f^* u dualnom prostoru $(\mathcal{P}_2)^*$ takav da vrijedi $f^*(x^2 + x) = 1$, $f^*(x + 1) = 2$, $f^*(x^2 - 1) = 3$? Odgovor obrazložite.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 3

(a) (4 boda) Zadani su linearni operatori $A : \mathcal{P}_2 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ i $B : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3$ s

$$A(p) = \begin{bmatrix} p'(1) & p(2) \\ 0 & p(0) \end{bmatrix}, \ B\left(\begin{bmatrix} a+b+c+d & b+2c+d \\ c+3d & d \end{bmatrix}\right) = a+bt+ct^2+dt^3, \ a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Odredite matrični prikaz linearnog operatora $B \circ A$ u paru baza $(e) = (1, t, t^2), (f) = (1, t, t^2, t^3)$. ($\mathcal{P}_n$ je oznaka za vektorski prostor polinoma s realnim koeficijentima čiji je stupanj manji ili jednak n).

(b) (1 bod) Matrični prikaz linearnog operatora $C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ u kanonskoj bazi za $\mathbb{R}^2$ je zadan s

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Postoje li $x, y \in \mathbb{R}$ i baza (f) za $\mathbb{R}^2$ takvi da je matrični prikaz linearnog operatora C u bazi (f) matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}?$$

Obrazložite odgovor.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 4

(a) (3 boda) Odredite sve $k \in \mathbb{R}$ za koje se linearni operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan s

$$A(e) = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati.

(b) (2 boda) Odredite matrični prikaz od A^{10} u kanonskoj bazi za $k = 2$.

Rješenje:

a) Računamo karakteristični polinom: $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \cdots = -\lambda(\lambda - k)(\lambda - 1)$. Imamo tri slučaja:

- $k \neq 0, 1$

  Vrijedi $a(1) = a(0) = a(k) = 1$. Nadalje, imamo $1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda)$, pa slijedi $g(1) = g(0) = g(k) = 1$. Dakle, $a(1) = g(1) = 1$, $a(0) = g(0) = 1$ te $a(k) = g(k) = 1$, pa je matrica dijagonalizabilna.

- $k = 0$

  Vrijedi $a(1) = 1$ te $a(0) = 2$. Nadalje, imamo $a(1) = g(1) = 1$. Računamo $g(0)$. Rješavamo sustav:

  $$Av = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} v = 0$$

  iz čega dobivamo

  $$V_A(0) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

  Dakle, $g(0) = 1 < 2 = a(0)$, pa se matrica ne može dijagonalizirati u ovom slučaju.

- $k = 1$

  Vrijedi $a(0) = g(0) = 1$ te $a(1) = 2$. Računamo $g(1)$. Rješavamo sustav:

  $$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

  iz čega dobivamo

  $$V_A(1) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right].$$

  Dakle, $g(1) = 1 < 2 = a(2)$, pa se u ovom slučaju A može dijagonalizirati.

Matrica se može dijagonalizirati za $k \neq 0$.

b) Određujemo prikaz od A^{10} u kanonskoj bazi za

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom je jednak $k_A(\lambda) = (2 - \lambda)(-\lambda)(1 - \lambda)$, pa je $\sigma(A) = \{0, 1, 2\}$.

- $\lambda = 0$. Rješavamo sustav:

  $$Av = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} v = 0,$$

  pa slijedi

  $$V_A(1) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right].$$

- $\lambda = 1$. Rješavamo sustav:

  $$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} v = 0,$$

  pa slijedi

  $$V_A(3) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right].$$

- $\lambda = 2$. Rješavamo sustav:

  $$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} v = 0,$$

pa slijedi

$$V_A(3) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

Sada imamo:

$$A(e) = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned} A^{10}(e) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ -2^{8} & 0 & 0 \\ 2^{9} & 2 & 1. \end{bmatrix} \end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 26. travnja 2022.

ZADATAK 5

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $D \in L(V)$ netrivijalan ($D \neq 0$) singularan operator.

(a) (3 boda) Dokažite da postoji operator $E \in L(V)$, $E \neq 0$, sa svojstvom $DE = 0$. Koji je najveći mogući rang linearnog operatora $E \neq 0$ s navedenim svojstvom? Konstruirajte E za koji se taj najveći rang postiže.

(b) (3 boda) Dokažite da postoji operator $F \in L(V)$, $F \neq 0$, sa svojstvom $FD = 0$. Koji je najveći mogući rang linearnog operatora $F \neq 0$ s navedenim svojstvom? Konstruirajte F za koji se taj najveći rang postiže.