Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2
Kolokvij 29.6.2022.

1. (8 bodova) Za sljedeća preslikavanja odredite jesu li distribucije, odnosno temperirane distribucije na $\mathbb{R}$:

   (a) $\langle T_a, \varphi\rangle = \int_0^\infty e^{\lceil \cos x\rceil + x^2}\varphi(x)dx$,

   (b) $\langle T_b, \varphi\rangle = \int_{-1}^1 x\varphi^2(x)dx$,

   (c) $\langle T_c, \varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^\infty \varphi(n^2)$.

   Rješenje:

   (a) Preslikavanje je očito linearno. S obzirom da je $e^{\lceil \cos x\rceil + x^2} \le e^{1+x^2} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, slijedi da je T_a regularna distribucija.
   S druge strane je $e^{\lceil \cos x\rceil + x^2} \ge e^{x^2}$ s.s., pa kao i u vježbama za taj primjer slijedi da $T_a \notin \mathcal{S}'$.

   (b) Preslikavanje nije linearno, pa nije niti distribucija.

   (c) Preslikavanje je očito linearno. Za $\varphi \in C_c^\infty$ takvu da je $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq [-N^2, N^2]$. Tada je

   $$|\langle T_c, \varphi\rangle| \le \sum_{n=-N}^{N} |\varphi(n^2)| \le (2N^2+1)||\varphi||_{L^\infty},$$

   pa vidimo da je $T_c \in \mathcal{D}'$.
   Također, za $\varphi \in \mathcal{S}$ imamo

   $$|\langle T_c, \varphi\rangle| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)|\varphi(n^2)|\cdot(1+n^2)^{-1} \le ||\varphi||_{2,0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2},$$

   odakle zbog konvergencije posljednjeg reda slijedi da je $T_c \in \mathcal{S}'$.

2. (4 boda) Neka je $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ neparna funkcija te neka je $\vartheta_n(x) := n\vartheta(nx)$. Pokažite da vrijedi $\vartheta_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$.

   Rješenje: S obzirom da je ϑ neparna funkcija, slijedi da je $\int \vartheta = 0$, pa postoji primitivna funkcija $\Theta \in C_c^\infty$. Neka je $\varphi \in C_c^\infty$. Tada je

   $$\int \vartheta_n(x)\varphi(x)dx = \int n\vartheta(nx)\varphi(x)dx = \int \Theta'(x)\varphi(x/n)dx = -\frac{1}{n}\int \Theta(x)\varphi'(x/n)dx,$$

   pa kako je

   $$\frac{1}{n}\int \Theta(x)\varphi'(x/n)dx \le \frac{1}{n}||\Theta||_{L^1}||\varphi'||_{L^\infty},$$

   slijedi tvrdnja.

3. (3 boda) Odredite Fourierovu transformaciju funkcije $f(x) = e^{-x^2}\sin(2\pi x)$.

Rješenje:

Zapišimo $f = g \cdot h$, gdje je

$$g(x) = e^{-x^2}, \qquad h(x) = \sin(2\pi x).$$

Kako je

$$\widehat{g}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2} \quad \text{te} \quad \widehat{h} = \frac{1}{2i}(\delta_1 - \delta_{-1}),$$

slijedi da je

$$\widehat{g \cdot h} = \widehat{g} * \widehat{h} = \frac{\sqrt{\pi}}{2i}(e^{-\pi^2(\xi-1)^2} - e^{-\pi^2(\xi+1)^2}).$$

4. (4 boda) Neka je $f(\xi) = \int_{-1}^{1} x\sin(2\pi\xi x)dx$. Izračunajte $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$.

Rješenje: Primijetimo kako je zbog neparnosti funkcije x, odnosno funkcije $\sin x$, te parnosti funkcije $\cos x$

$$f(\xi) = \int_{-1}^{1} x\cos(2\pi\xi x)dx + \int_{-1}^{1} x\sin(2\pi\xi x)dx = -i\int_{-1}^{1} xe^{-2\pi i\xi x}dx = -i\widehat{x \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi).$$

Prema Plancherelovom teoremu je tada

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2 = \int_{-1}^{1}x^2dx = \frac{2}{3}.$$

5. (8 bodova) Neka je $(\varphi_n)_n$ niz u $C_c^\infty(\mathbb{R})$, te $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ takva da vrijedi $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$. Vrijedi li:

(a) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$,

(b) $\varphi_n \xrightarrow{L^p} \varphi$,

(c) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \varphi$?

Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom.

Rješenje:

(a) Tvrdnja ne vrijedi. Kontraprimjer: neka je $\vartheta \in C_c^\infty$ proizvoljna, te promotrimo niz $\varphi_n(x) := e^{-x}\vartheta(x-n)$. Niz konvergira k 0 u $\mathcal{S}$ (pokazano u materijalima s posljednjih vježbi), no zbog "putujućeg" nosača ne konvergira k 0 u $\mathcal{D}$.

(b) Tvrdnja vrijedi. Slijedi direktno iz nejednakosti pokazane na predavanjima, $||\varphi_n - \varphi||_{L^p} \leq C||\varphi_n - \varphi||_k \to 0$, za odgovarajuću polunormu $||\cdot||_k$.

(c) Tvrdnja vrijedi. Za $\psi \in \mathcal{S}$ imamo zbog ulaganja $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}'$

$$\langle \varphi_n, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi_n \rangle \to \langle \psi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle.$$

6. (3 boda) Na $H_0^1(-1,1)$ definiramo bilinearnu formu B s

$$B[u,v] = \int_{-1}^{1} (1+|x|^2)u'(x)v'(x) + u(x)v(x)dx, \qquad u,v \in H_0^1(-1,1),$$

Dokažite da je B neprekidna i koercitivna.

Rješenje: Pokažimo prvo neprekidnost. Za $u, v \in H_0^1$ imamo

$$\begin{aligned} |B[u,v]| &\leq \int_{-1}^{1} (1+|x|^2)|u'(x)||v'(x)| + |u(x)||v(x)|dx \\ &\leq 2||u'||_{L^2}||v'||_{L^2} + ||u||_{L^2}||v||_{L^2} \\ &\leq 3||u||_{H^1}||v||_{H^1}. \end{aligned}$$

Koercitivnost pak slijedi iz

$$B[u,u] = \int_{-1}^{1} (1+|x|^2)u'(x)^2 + u(x)^2 dx \geq \int_{-1}^{1} u'(x)^2 + u(x)^2 dx = ||u||_{H^1}^2.$$