LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 22. travnja 2024.

ZADATAK 1

Zadani su sljedeći linearni operatori na $\mathbb{R}^2$:

- R - rotacija oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{2}$,
- P - ortogonalna projekcija na pravac $y = -x$,
- Z - zrcaljenje s obzirom na pravac $y = x$,
- Q - ortogonalna projekcija na pravac $x = 0$.

(a) (3 boda) Dokažite da je $\{R, P, Z, Q\}$ baza za $L(\mathbb{R}^2)$.

(b) (4 boda) Neka je $A \in L(L(\mathbb{R}^2))$ zadan na bazi iz (a) dijela zadatka s

$$A(R) = R^{2024}, \quad A(P) = P^{2024}, \quad A(Z) = Z^{2024}, \quad A(Q) = Q^{2024}.$$

Odredite po jednu bazu za $\operatorname{Im} A$ i $\operatorname{Ker} A$.

(c) (3 boda) Možemo li za R odabrati operator rotacije za neki drugi kut takav da je operator A zadan po istom principu kao u (b) izomorfizam?

Rješenje:

(a) Označimo s (e) kanonsku bazu za $\mathbb{R}^2$. Tada su odgovarajući matrični prikazi danih operatora

$$R(e) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P(e) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za dane matrice je lako provjeriti da su linearno nezavisne (npr., vidimo da je $P(e)$ jedina s netrivijalnom koordinatom na mjestu (1,1), pa njenom eliminacijom preostaju tri očito nezavisne matrice). Stoga su i polazni operatori linearno nezavisni, pa kako ih ima $4 = \dim L(\mathbb{R}^2)$, slijedi da je to i baza.

(b) Primijetimo kako je zbog (geometrijskih) svojstava zadanih operatora

$$A(R) = R^{2024} = (R^4)^{506} = I^{506} = I, \quad A(P) = P^{2024} = P,$$
$$A(Z) = Z^{2024} = (Z^2)^{1012} = I^{1012} = I, \quad A(Q) = Q^{2024} = Q.$$

Ponovno se jednostavnim promatranjem netrivijalnih koordinata matrica vidi da je $\{I, P, Q\}$ linearno nezavisan skup, pa slijedi da je

$$\operatorname{Im} A = [\{I, P, Q\}], \qquad \operatorname{Ker} A = [\{R - Z\}].$$

(c) S obzirom da je za svaki kut φ, $R_\varphi^{2024} = R_{2024\varphi}$, zapravo je dovoljno pronaći rotaciju R_φ takvu da je $\{R, I, P, Q\}$ linearno nezavisan skup: to će prema već izračunatom biti upravo slika odgovarajućih operatora R, P, Z, Q, pa će slijediti da je A izomorfizam jer je bazu preslikao u bazu. Sličnim razmatranjem kao u (a) dijelu, možemo vidjeti da su operatori $\{R_{\frac{\pi}{2}}, P, I, Q\}$ linearno nezavisni. Stoga vidimo da umjesto rotacije za $\frac{\pi}{2}$ možemo uzeti rotaciju za kut $\frac{\pi}{2 \cdot 2024}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 22. travnja 2024.

ZADATAK 2

Neka je V vektorski prostor simetričnih matrica u $M_2(\mathbb{R})$ i neka je dana baza B za V:

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) (8 bodova) Odredite djelovanje elemenata baze $B^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ za V^*, dualne bazi B:

$$b_i^* \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right), \text{ za } i = 1, 2, 3; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

b) (2 boda) Prikažite u bazi B^* funkcional $f \in V^*$, dan djelovanjem

$$f \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = 3a + 2b + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. a) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sustav:

$$\begin{aligned} a &= \alpha \\ b &= -\alpha + \beta \\ c &= -\beta + \gamma \end{aligned}$$

ima rješenje $\alpha = a$, $\beta = a + b$, $\gamma = a + b + c$. Sada je

$$b_1^* \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \alpha = a, \quad b_2^* \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \beta = a + b, \quad b_3^* \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \gamma = a + b + c.$$

b)

$$\begin{aligned} &f = \alpha b_1^* + \beta b_2^* + \gamma b_3^*, \\ &\alpha = f(b_1) = 1, \quad \beta = f(b_2) = 1, \quad \gamma = f(b_3) = 1. \end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 22. travnja 2024.

ZADATAK 3

(10 bodova) Zadana je matrica regularnog operatora $A \in L(\mathcal{P}_2)$ u paru kanonske baze (e) i baze $(e') = \{1, t + t^2, 1 - t^2\}$

$$A(e', e) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Odredite matricu operatora A^{-1} u paru kanonske baze (e) i baze $(e'') = \{1 - t, t, 1 + t^2\}$, tj. odredite matricu $(A^{-1})(e'', e)$.

Rješenje. Iz

$$I_{(e'')} = (AA^{-1})_{(e'')} = A_{(e,e'')}(A^{-1})_{(e'',e)}$$

imamo

$$\begin{aligned}
(A^{-1})_{(e'',e)} &= [A_{(e,e'')}]^{-1} = [I_{(e,e')}A_{(e',e)}I_{(e,e'')}]^{-1} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 22. travnja 2024.

ZADATAK 4

(a) (6 bodova) Odredite sve $a, b, c \in \mathbb{R}$ za koje se linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan s

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati.

(b) (4 boda) Odredite matrični prikaz od A^{20} u kanonskoj bazi za $a = b = c = 0$.

Rješenje:

a) Računamo karakteristični polinom: $k_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \cdots = (1-\lambda)^2(a-\lambda)$. Imamo dva slučaja:

- $a = 1$

  Vrijedi $a(1) = 3$. Nadalje, imamo $1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda)$. Računamo:

  $$(A - Iv) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0.$$

  iz čega dobivamo

  $$V_A(1) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

  Slijedi $g(1) = 1$. Dakle, $a(1) = 3$ te $g(1) = 1$ te matrica nije dijagonalizabilna.

- $a \neq 1$

  Vrijedi $a(1) = 2$ te $a(a) = 1$. Nadalje, imamo $a(a) = g(a) = 1$. Računamo $g(1)$. Rješavamo sustav:

  $$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & a-1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

te za $c = 0$ dobivamo

$$V_A(1) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right].$$

Dakle, $g(1) = 2$, pa imamo $a(1) = g(1) = 2$ te $a(a) = g(a) = 1$ te se matrica može dijagonalizirati.

Operator se može dijagonalizirati za $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$, $c = 0$.

b) Određujemo prikaz od A^{20} u kanonskoj bazi za

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom je jednak $k_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(-\lambda)$, pa je $\sigma(A) = \{1, 0\}$.

- $\lambda = 1$. Rješavamo sustav:

$$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0,$$

pa slijedi

$$V_A(1) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right].$$

- $\lambda = 0$. Rješavamo sustav:

$$(A - 0I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v = 0,$$

pa slijedi

$$V_A(0) = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right].$$

Sada imamo:

$$A(e) = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pa dobivamo

$$A^{20}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

1. kolokvij - 22. travnja 2024.

ZADATAK 5

(10 bodova) Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, pri čemu su $n = \dim V$ i $m = \dim W$ takvi da je $n < m$. Neka su $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, V)$ takvi da je BA izomorfizam. Odredite

$$r(A),\ r(B),\ r(AB),\ d(A),\ d(B),\ d(AB).$$

Navedite konkretne primjere ovakvih linearnih operatora A i B.

Rješenje. Kako je BA izomorfizam, slijedi da je A monomorfizam i B epimorfizam. (Ako je $Ax = 0$ za neki $x \in V$, tada je $BAx = 0$, a kako je BA izomorfizam, slijedi $x = 0$. Zato je jezgra od A trivijalna i $d(A) = 0$. Nadalje, slika od BA sadržana je u slici od B, a kako je BA surjektivan, slijedi da je i B surjektivan. Zato je $r(B) = \dim V$.) Zato je

$$d(A) = 0, \quad r(B) = \dim V = n.$$

Prema teoremu o rangu i defektu je $r(A) + d(A) = \dim V$ i $r(B) + d(B) = \dim W$, što daje

$$r(A) = \dim V = n, \quad d(B) = \dim W - \dim V = m - n.$$

Nadalje, ako je $Bx = 0$ tada je $ABx = 0$, pa je $\operatorname{Ker} B \le \operatorname{Ker}(AB)$. Obratno, ako je $ABx = 0$, zbog injektivnosti od A slijedi da je $Bx = 0$, dakle $\operatorname{Ker}(AB) \le \operatorname{Ker} B$. Slijedi $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker}(AB)$, pa je $d(AB) = d(B) = m - n$. Prema teoremu o rangu i defektu je $r(AB) = \dim W - d(AB) = m - (m - n) = n$.

Konkretni primjer: $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, A(x, y) = (x, y, 0)$ i $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, B(x, y, z) = (x, y)$.