2 Nizovi i redovi kompleksnih funkcija

2.1 Nizovi i redovi kompleksnih brojeva

Zadatak 2.1.1. Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, gdje je $z \in \mathbb{C}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, gdje je $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n}$

Rješenje. (a) Označimo $z_n := \frac{z^n}{n!}$. Provjerit ćemo d'Alembertov kriterij. Vrijedi

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Po d'Alembertovom kriteriju traženi red konvergira apsolutno za svaki $z \in \mathbb{C}$.

(b) Označimo $z_n := z^n$. Provjeravamo Cauchyjev kriterij. Imamo

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{|z|^n} = |z|,$$

pa je

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = |z| < 1.$$

Prema Cauchyjevom kriteriju ovaj red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je $|z| < 1$.

(c) Uočimo najprije $e^{\frac{i}{n}} = \cos\frac{1}{n} + i\sin\frac{1}{n}$. Pokažimo da red realnih brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}}{n}$$

divergira. Kako vrijedi $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n \geq n_0 \implies \cos\frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

iz čega slijedi

$$n \geq n_0 \implies \frac{\cos\frac{1}{n}}{n} > \frac{1}{2n},$$

odnosno

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}}{n} > \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2n}.$$

No, red na desnoj strani divergira (jer divergira harmonijski red) pa po usporednom kriteriju divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}}{n}$. Kako red kompleksnih brojeva konvergira ako i samo ako konvergiraju redovi realnih i imaginarnih dijelova, zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n}$ divergira.

$\square$

2.2 Redovi potencija

Zadatak 2.2.1. Odredite radijus konvergencije sljedećih redova.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2-i} \right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$

Rješenje. (a) U ovom zadatku imamo $a_n = \frac{1}{(2-i)^n}$. Koristimo:

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \frac{1}{|2-i|}} = \sqrt{5}.$$

(b) Ovdje je

$$a_n = \begin{cases} 2^k, & \text{ako je } n = k! \text{ za neki } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Vrijedi

$$\sqrt[k!]{|a_{k!}|} = \sqrt[k!]{2^k} = 2^{\frac{1}{(k-1)!}},$$

pa je $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{|a_{k!}|} = 1$. Dakle, niz $\sqrt[n]{|a_n|}$ ima dva gomilišta: 0 i 1, pa je

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Zadatak 2.2.2. Odredite radijus konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

Rješenje. Koristit ćemo formulu, koja daje radijus konvergencije ako taj limes postoji,

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Uz $a_n = \frac{n!}{n^n}$, imamo

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

iz čega slijedi

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

□

Zadatak 2.2.3. Odredite područje konvergencije i sumu sljedećih redova.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

Rješenje. (a) Imamo

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1}} = 1,$$

pa dani red potencija oko nule konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je $|z| < 1$.

Neka je $S_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n$. Kako vrijedi (provjerite)

$$(1 + z + ... + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1},$$

te kako za $|z| < 1$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$, dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z},$$

to jest vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

(b) Uz $a_n = n$, budući da sljedeći limes postoji, imamo

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n + 1} = 1.$$

Dakle, red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je $|z| < 1$.

Uočimo da je $nz^n = z \cdot (nz^{n-1}) = z \cdot (z^n)'$, pa je prema prethodnom dijelu

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (z^n)' = z \cdot \left(\frac{1}{1 - z} \right)' = \frac{z}{(1 - z)^2}, \quad |z| < 1.$$

$\square$