IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI

JUNIORI

23. 03. 2018.

Zadatak 1. Postoji li familija neprekidnih funkcija $\{f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \alpha \in \mathbb{R}\}$ koja zadovoljava sljedeće uvjete:

- za sve međusobno različite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ grafovi funkcija f_α i f_β sijeku se u točno tri točke; i
- za sve međusobno različite $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ grafovi funkcija f_α, f_β i f_γ imaju točno dvije zajedničke točke?

Zadatak 2. Neka $M_n(\mathbb{R})$ skup realnih $n \times n$ matrica. Nađite sve surjektivne funkcije

$$f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

takve da vrijedi

$$f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\}\,,$$

za sve $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$.

Zadatak 3. Neka je ϕ Eulerova funkcija. Nađite sve prirodne brojeve n takve da jednadžba

$$\phi\,(\ldots(\phi(x))) = n,$$

gdje se funkcija ϕ pojavljuje k puta, ima rješenja za svaki prirodni broj k.

Zadatak 4. Označimo $\mathbb{Q}^+ := \mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty\rangle$ i $S := \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$.

(a) Dokažite da jednadžba $x^y = y^x$ ima beskonačno mnogo rješenja $(x, y) \in S$ takvih da je $x \neq y$.

(b) Dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ jednadžba $x^y = y^x$ ima konačno mnogo rješenja $(x, y) \in S$ takvih da je $|x - y| \geq \varepsilon$.

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA

SENIORI

23. 03. 2018.

Zadatak 1. Postoji li neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja poprima svaku vrijednost točno dvaput?

Zadatak 2. Neka $M_n(\mathbb{R})$ skup realnih $n \times n$ matrica. Nađite sve surjektivne funkcije

$$f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

takve da vrijedi

$$f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\},$$

za sve $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$.

Zadatak 3. Za konačan podskup skupa prirodnih brojeva $A \subseteq N$ definiramo $\rho(A)$ kao broj različitih prostih faktora umnoška elemenata skupa A:

$$\rho(A) = card\{p \text{ prost}\colon p \mid \prod_{a \in A} a\}.$$

Nadalje, definiramo A^+:

$$A^+ = \{a + b\colon a, b \in A, a \neq b\}.$$

Primjerice, za $A = \{5, 6, 9, 10\}$ imamo $\rho(A) = card\{2, 3, 5\} = 3$, $A^+ = \{11, 14, 15, 16, 19\}$.
U ovisnosti o $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ odredite, ako postoje, najmanji M_n i najveći m_n takve da je nejednakost

$$m_n \leq \rho(A) - \rho(A^+) \leq M_n$$

zadovoljena za sve n-člane skupove A.

Zadatak 4. Nađite sve prirodne brojeve n za koje postoji familija F tročlanih podskupova skupa $S = \Big\{1, 2, ..., n\Big\}$ takva da vrijedi:

1. za svaka dva različita elementa $a, b \in S$ postoji točno jedan $A \in F$ koji sadrži a i b
2. ako su $a, b, c, x, y, z \in S$ takvi da su $\Big\{a, b, x\Big\}$, $\Big\{a, c, y\Big\}$, $\Big\{b, c, z\Big\} \in F$, tada je $\Big\{x, y, z\Big\} \in F$.

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*