IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA
JUNIORI
27. veljače 2015.

Zadatak 1. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ monotona funkcija i neka je $a_0 \in \mathbb{R}$. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran je rekurzivno formulom

$$a_n = f\left(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da limesi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ postoje (konačni ili beskonačni) te da su jednaki.

Rješenje. Kako je f pozitivna vidimo da je $a_n > 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$. To znači da je niz

$$a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0 + a_1 + a_2,\ \ldots$$

rastući, odnosno, niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i funkcija f su jednako monotoni. Dakle, navedeni limesi postoje (radi pozitivnosti i monotonosti).

- f je rastuća. To odmah znači da je i $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući (i pozitivan), što znači da niz $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži u $+\infty$ pa u zadanoj rekurziji vidimo da lijeva strana teži u $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, a desna u $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, dakle, ti limesi su jednaki.
- f je padajuća, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, onda dolazimo do istog zaključka kao gore. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, onda, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo (jer je f padajuća) da je

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \le f\left(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}\right) = a_n.$$

  Kako $a_n \to 0$ i f je pozitivna, vidimo da je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. ✓

Zadatak 2. Neka je $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le 3}$ realna 3×3 matrica za koju vrijedi $-1 \le a_{i,j} \le 1$, za sve i, j. Odredite maksimalnu vrijednost od $\det A$.

Rješenje. Znamo da je

$$\det A = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3},$$

odnosno vidimo da je to linearno u $a_{1,1}$ pa će postići maksimalnu vrijednost za $a_{1,1} = \pm 1$. Analogno zaključimo za ostale koeficijente matrice A. Dakle, svi sumandi koji se pojavljuju u $\det A$ su ± 1, u situaciji kada $\det A$ postiže maksimum. Kada bi prva tri sumanda bila jednaka 1 vidimo da moramo imati paran broj -1 među koeficijentima od A. Slično, kada bi zadnja tri sumanda bila jednaka 1 vidimo da moramo imati neparan broj -1 među koeficijentima od A. Stoga zaključujemo da je $\det A \le 4$. Pokažimo još da se jednakost postiže, to je za npr.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad ✓$$

Zadatak 3. Za dani pozitivan realan broj x definiramo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurzivno na sljedeći način: $a_0 = 0$ i

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ako je } \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{n} \le x; \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredi sve pozitivne realne x za koje pripadni niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ima beskonačno mnogo članova različitih od nule.

Rješenje. Definirajmo $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

Primijetimo da će za dani x pripadni niz imati konačno ne–nul elemenata samo ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S_n = x$. U suprotnom, ako je $S_n < x$, za sve $n \in \mathbb{N}$, onda za svaki n postoji najmanji $m \ge n$ takav da je $S_m + \dfrac{1}{m} < x$ pa vidimo da je onda i $a_m \ne 0$ itd.

U ovom trenutku tvrdimo da za dani x pripadni niz ima beskonačno mnogo članova različitih od nule ako i samo ako je x iracionalan broj. Jedan smjer je jasan nakon prethodne opservacije. Naime, ako niz ima samo konačno ne–nul elemenata, onda je $x = S_n$ za neki n pa je x racionalan kao suma od konačno mnogo racionalnih brojeva.

Pretpostavimo sada da je x racionalan te da pripadni niz ima beskonačno mnogo ne–nul elemenata, s ciljem dolaska do kontradikcije. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $x - S_n$ je pozitivan racionalan. Neka je $\dfrac{p_n}{q_n}$ njegov zapis, tako da je $M(p_n, q_n) = 1$. Znamo da je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, stoga mora postojati beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ takvih da je $a_n = 0$. Među svim takvim n izaberimo bilo koji veći od 1 i označimo ga s n_1. Dokažimo indukcijom sljedeću tvrdnju:

$$\text{Za svaki } n \ge n_1 \text{ vrijedi } \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{n-1}.$$

Za $n = n_1$ vrijedi da je $S_{n_1} + \dfrac{1}{n_1} > x \implies \dfrac{p_{n_1}}{q_{n_1}} < \dfrac{1}{n_1} < \dfrac{1}{n_1 - 1}$. Nadalje imamo:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = x - S_{n+1} = x - S_n - a_n = \frac{p_n}{q_n} - a_n.$$

Sada, ako je $a_n = 0$, onda (kao za n_1) imamo da je $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{p_n}{q_n} < \dfrac{1}{n}$, a ako je $a_n \ne 0$, onda je $a_n = \dfrac{1}{n}$ pa je $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{p_n}{q_n} - a_n < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{n}$. S tom tvrdnjom dokažimo sljedeću:

$$\text{Za svaki } n \ge n_1, \text{ ako je } a_n \ne 0, \text{ tada je } p_{n+1} < p_n.$$

Neka je $a_n \ne 0$, tj. $a_n = \dfrac{1}{n}$. Tada je

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{1}{n} = \frac{np_n - q_n}{nq_n}.$$

Kako je $M(p_{n+1}, q_{n+1}) = 1$ vidimo da je $p_{n+1} \le np_n - q_n$, dakle, dovoljno je dokazati da je $np_n - q_n < p_n$. No,

$$np_n - q_n < p_n \iff n\frac{p_n}{q_n} - 1 < \frac{p_n}{q_n} \iff \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{n-1}.$$

Dakle, ukoliko je x racionalan i pripadni niz sadrži beskonačno ne–nul elemenata, onda imamo beskonačan strogo padajući niz prirodnih brojeva, što je očita kontradikcija. Gotovo! ✓

Zadatak 4. Pretpostavimo da polinom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(a_n \neq 0)$ ima realne koeficijente i samo realne nultočke. Dokažite da vrijedi

$$\left(\frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \right)^2 \geq \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \frac{a_{k+2}}{\binom{n}{k+2}}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$.

Rješenje. Jednostavna pomoćna tvrdnja koju trebamo je: *Ako polinom $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ ima samo realne nultočke, tada i njegova derivacija $P'(x)$ ima samo realne nultočke.* Ona se dokazuje na sljedeći način. Neka je n stupanj od P i neka su $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ sve nultočke od P i to s kratnostima $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Jasno je da mora biti $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Poznata je činjenica da je tada x_j nultočka od P' kratnosti $k_j - 1$ (pri čemu nultočka kratnosti 0 zapravo uopće nije nultočka). Osim toga, po Rolleovom teoremu P' ima još barem po jednu realnu nultočku u svakom intervalu $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. To je sveukupno

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \cdots + (k_m - 1) + m - 1 = n - 1$$

nultočaka (računajući i njihove kratnosti), a kako je stupanj od P' jednak $n-1$, zaključujemo da su to sve njegove nultočke. Prema tome, ne ostaje "mjesta" za nultočke od P' koje ne bi bile realne.

Višestrukom primjenom navedene pomoćne tvrdnje zaključujemo da polinom

$$Q(x) := P^{(k)}(x) = (\frac{d}{dx})^k P(x)$$

stupnja $n-k$ također ima samo realne nultočke. Nadalje je dobro definiran polinom $R(x) := x^{n-k} Q(\frac{1}{x})$. Ako je $\alpha \neq 0$ nultočka od Q, tada je $\frac{1}{\alpha}$ nultočka od R iste kratnosti. Ako je pak $m \geq 0$ kratnost nultočke $x = 0$ u polinomu Q, tada R ima stupanj jednak $n - k - m$. Zaključujemo da i polinom R ima samo realne nultočke. Konačno, promatramo polinom $S(x) := R^{(n-k-2)}(x)$, koji radi navedene pomoćne tvrdnje opet ima sve realne nultočke.

Preostaje nam postepeno izvesti formule za Q, R i S.

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{j!}{(j-k)!} x^{j-k} = \sum_{j=0}^{n-k} a_{j+k} \frac{(j+k)!}{j!} x^j \\
R(x) &= x^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} a_{j+k} \frac{(j+k)!}{j!} \frac{1}{x^j} = \sum_{j=0}^{n-k} a_{n-j} \frac{(n-j)!}{(n-k-j)!} x^j \\
S(x) &= \sum_{j=n-k-2}^{n-k} a_{n-j} \frac{(n-j)!}{(n-k-j)!} \frac{j!}{(j-(n-k-2))!} x^{j-(n-k-2)} \\
&= \frac{1}{2} n! \left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}} x^2 + \frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} 2x + \frac{a_{k+2}}{\binom{n}{k+2}} \right)
\end{aligned}$$

Diskriminanta posljednje kvadratne funkcije mora biti ≥ 0, iz čega slijedi tvrdnja zadatka. ✓

Napomena. Ovaj rezultat se nekad zove *Newtonov teorem*, što baš i nije posebno određujuće.

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA

SENIORI

27. veljače 2015.

Zadatak 1. Neka su c_0, c_1, c_2, $\ldots$, c_{2015} realni brojevi, $c_{2015} \neq 0$, i neka je

$$f(x,\, y) = \sum_{k=0}^{2015} c_k \frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{k+1}.$$

Ako postoje različiti realni brojevi a, b i c takvi da je $f(a,\, b) = f(b,\, c) = 0$, dokažite da polinom $P(x) = c_{2015}x^{2015} + c_{2014}x^{2014} + \ldots + c_1 x + c_0$ ima barem 3 (brojeći kratnosti) realne nultočke.

Rješenje. Promatrajmo polinom $Q(x) = c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{c_{2015}}{2016}x^{2016}$. Vidimo da je $Q'(x) = P(x)$ te da je $f(x,\, y) = Q(x) - Q(y)$. Uvjet nam govori da je $Q(a) = Q(b) = Q(c)$, bez smanjenja općenitosti neka je $a < b < c$. Sada prema Rolleovom teoremu vidimo da P ima realnu nultočku na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ i na intervalu $\langle b,\, c\rangle$. Još preostaje za primijetiti da je P neparnog stupnja, što znači da ima neparan broj (s kratnostima) realnih nultočaka. Tj. P ima barem 3 (brojeći kratnosti) realne nultočke. ✓

Zadatak 2. Dokažite da je matrica

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

pozitivno definitivna. Tj. dokažite da je $\langle \mathbf{A}x, x\rangle > 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Rješenje. Neka je je $x \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Tada je

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}x, x\rangle = x^T \mathbf{A}x &= \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{x_i x_j}{i+j} \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-1}\, dt = \int_0^1 \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i t^i\right)^2}{t}\, dt \ge 0\end{aligned}$$

Nadalje, ako vrijedi znak jednakosti, tada polinom $t \mapsto \sum_{i=1}^n x_i t^i$ nužno ima beskonačno mnogo nultočaka, odakle slijedi da je $x = 0$. Dakle, matrica $\mathbf{A}$ je doista pozitivno definitivna. ✓

Zadatak 3. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jedinični vektori u nekom unitarnom prostoru koji imaju svojstvo da su među svaka tri od njih neka dva ortogonalna. Dokažite da za te vektore vrijedi

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \le 2n^{3/4}.$$

Rješenje. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za bazu možemo uzeti npr. $n = 1, 2, 3$, jer je tada tvrdnja trivijalna (naprosto po nejednakosti trokuta). Uzmimo $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za skupove s manje od n vektora te neka su dani jedinični vektori $x_1, \ldots, x_n$ sa svojstvom iz zadatka. Promotrimo sve ortonormirane podskupove od $\{x_1, \dots, x_n\}$ i neka najveći među njima ima točno m elemenata. Razlikujemo 2 slučaja.

Slučaj 1. $m \le \sqrt{n}$.

Za vektor x_i pogledajmo skup S_i svih vektora x_j, $j \ne i$ koji nisu ortogonalni na x_i. Svaka dva vektora iz S_i moraju biti ortogonalna po pretpostavci zadatka primijenjenoj na njih i x_i. Dakle, S_i je ortonormirani skup te po definiciji od m imamo $|S_i| \le m \le \sqrt{n}$. Slijedi da neortogonalnih parova (x_i, x_j), $i \ne j$ ima najviše

$$\sum_{i=1}^{n} |S_i| \le n\sqrt{n} = n^{3/2}.$$

Dakle,

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{i,j} \langle x_i, x_j \rangle \le n + \sum_{i \ne j} |\langle x_i, x_j \rangle| \le n + n^{3/2} \le 4n^{3/2}.$$

Preostaje izvaditi drugi korijen i završiti korak indukcije u ovom slučaju.

Slučaj 2. $m > \sqrt{n}$.

Bez smanjenja općenitosti neka upravo prvih m vektora $x_1, \dots, x_m$ čini najveći ortonormirani podskup dane kolekcije, tako da po Pitagorinom poučku znamo

$$\|x_1 + \cdots + x_m\| = \sqrt{m}.$$

Iskoristimo pretpostavku indukcije na zadnjih $n - m$ vektora $x_{m+1}, \dots, x_n$, tako da još imamo

$$\|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \le 2(n - m)^{3/4}.$$

Sve u svemu, radi nejednakosti trokuta,

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \le m^{1/2} + 2(n - m)^{3/4}.$$

Kako bismo upotpunili korak indukcije, još jedino treba provjeriti

$$m^{1/2} + 2(n - m)^{3/4} \le 2n^{3/4}.$$

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti nam odmah daje da za $x > y > 0$ vrijedi

$$x^{3/4} - y^{3/4} > \tfrac{3}{4} x^{-1/4} (x - y).$$

Uzimanjem $x = n$, $y = n - m$ zbog $n < m^2$ doista dobivamo

$$2n^{3/4} - 2(n - m)^{3/4} > \tfrac{3}{2} n^{-1/4} m > \tfrac{3}{2} m^{-1/2} m = \tfrac{3}{2} m^{1/2} > m^{1/2}.$$

✓

Zadatak 4. Neka je K konveksan i kompaktan skup s nepraznom unutrašnjosti u euklidskom prostoru dimenzije d. Dokažite da se u njegovoj unutrašnjosti može odabrati točka T takva da za svaku tetivu $\overline{AB}$ od K kroz točku T vrijedi $\frac{1}{d} \le \frac{|AT|}{|BT|} \le d$.

*(**Tetiva** od K je dužina čiji krajevi leže na rubu od K, a sve međutočke se nalaze u unutrašnjosti od K.)*

*(Dokaz tvrdnje zadatka za euklidski prostor $\mathbb{R}^2$ vrijedi **8 bodova**!)*

Rješenje. Među svim simpleksima sadržanim u K postoji (barem) jedan koji ima najveći volumen. Naime, svaki (moguće degenerirani) simpleks $A_0 A_1 \dots A_d \subseteq K$ je jednoznačno predstavljen $(d+1)$-torkom točaka $(A_0, A_1, \dots, A_d) \in K^{d+1}$, a funkcija volumena

$$K^{d+1} \to [0, +\infty\rangle, \quad (A_0, A_1, \dots, A_d) \mapsto \mathrm{vol}(A_0 A_1 \dots A_d)$$

je svakako neprekidna. Kako neprekidna funkcija na kompaktnom skupu uvijek postiže maksimum, zaključujemo da doista postoji simpleks $A_0A_1\ldots A_d \subseteq K$ najvećeg volumena.

Neka je točka T definirana kao težište upravo tog simpleksa $A_0A_1\ldots A_d$. *Težište* simpleksa se može definirati rekurzivno po dimenziji d, kao presjek *težišnica*, tj. dužina koje spajaju neki od vrhova s težištem nasuprotne hiper-strane (koja je $(d-1)$-dimenzionalni simpleks). Lako je vidjeti da težište dijeli svaku od težišnica u omjeru $d:1$.

Neka je $B_0B_1\ldots B_d$ simpleks dobiven preslikavanjem simpleksa $A_0A_1\ldots A_d$ po homotetiji sa središtem T i koeficijentom $-d$. (Dakle, sve se "rastegne" d puta i preslika centralno simetrično obzirom na T.) Točka T je zapravo zajedničko težište od $A_0A_1\ldots A_d$ i $B_0B_1\ldots B_d$ te su točke $A_0,\ldots,A_d$ zapravo težišta hiper-strana novodobivenog simpleksa. Tvrdimo da je K sadržan u simpleksu $B_0B_1\ldots B_d$. Pretpostavimo da neka točka $P\in K$ leži izvan njega; bez smanjenja općenitosti neka se nalazi sa suprotne strane hiperravnine $B_1\ldots B_d$ od točke B_0. Obzirom da A_0 leži baš na toj hiperravnini, tada bi simpleks $PA_1\ldots A_d$ imao veći volumen od simpleksa $A_0A_1\ldots A_d$, što se protivi njegovoj konstrukciji.

Neka je $\overline{AB}$ proizvoljna tetiva od K kroz točku T. Nadalje, neka pravac AB siječe rub od $A_0A_1\ldots A_d$ u točkama A' i A'', a rub od $B_0B_1\ldots B_d$ u točkama B' i B''. Obzirom da je rub od K podskup od $B_0B_1\ldots B_d$ i disjunktan s unutrašnjosti od $A_0A_1\ldots A_d$, zaključujemo da imamo sljedeći raspored točaka na pravcu AB:

$$B' \quad A \quad A'' \quad T \quad A' \quad B \quad B''.$$

Radi homotetičnosti imamo

$$\frac{|A'T|}{|B'T|}=\frac{|A''T|}{|B''T|}=\frac{1}{d}$$

pa je konačno

$$\frac{|AT|}{|BT|}\le\frac{|B'T|}{|A'T|}=d,\quad \frac{|AT|}{|BT|}\ge\frac{|A''T|}{|B''T|}=\frac{1}{d}.$$

✓

Napomena. Zadatak se može formulirati i samo u dvije dimenzije, sa sasvim istim, ali jednostavnije zapisanim rješenjem.