Izborno natjecanje za Vojtech Jarnik

1. kategorija

02.03.2010.

Zadatak 1. Pravokutnik dimenzija 2×3 nalazi se u koordinatnoj ravnini i ima vrhove u točkama $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,3)$ i $(2,3)$. On se počinje gibati na sljedeći način: Najprije rotira za 90° u smjeru kazaljke na satu oko točke $(2,0)$, zatim rotira za 90° u smjeru kazaljke na satu oko točke $(5,0)$, pa 90° u smjeru kazaljke na satu oko točke $(7,0)$. Na kraju, rotira za 90° u smjeru kazaljke na satu oko točke $(10,0)$ (primijetimo da se stranica koja se početno nalazila na x-osi ponovno nalazi na x-osi). Odredite površinu lika omeđenog s x-osi i krivulje koju opisuje točka (pri tom gibanju) čija se početna pozicija nalazi u točki $(1,1)$.

Zadatak 2. Izračunajte limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right).$$

Zadatak 3. Neka je A regularna $n \times n$ matrica čiji je element svakog retka jednak 0, osim na jednom mjestu gdje je jednak 1 ili -1. Dokažite da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $A^k = A^\tau$ (gdje je A^τ transponirana matrica od A).

Zadatak 4. Promotrimo sljedeću igru koju igraju dva igrača A i B sa špilom od $2n$ karata, pri čemu su karte numerirane brojevima od 1 do $2n$. Špil se slučajno promiješa i zatim se svakom igraču podijeli po n karata. Počevši od igrača A, igrači u svakom potezu (jedan za drugim) odbacuju po jednu kartu i pritom objave broj odbačene karte. Igra završava čim je zbroj odbačenih karata djeljiv s $2n+1$ i pobjeđuje onaj igrač koji je zadnji odbacio kartu. Ukoliko pretpostavimo da oba igrača igraju s optimalnim strategijama, dokažite da igrač B uvijek pobjeđuje.

Zadatak 5. Dokažite da za svaki kompleksni polinim $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ s $|a_n| = |a_0| = 1$ postoji kompleksni polinom $Q(z) = b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0$ s $|b_n| = |b_0| = 1$, takav da je $|Q(z)| \le |P(z)|$ za sve $z \in S^1$ i čiji svi (kompleksni) korijeni leže na S^1 (gdje je $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ jedinična kružnica).

Zadatak 6. Dokažite da ne postoje prirodni brojevi a, b i c takvi da je

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}$$

prirodan broj.

Svaki zadatak vrijedi *20 bodova*.
Dozvoljeno vrijeme rješavanja: *4 sata*.

Matija Bašić
Ilja Gogić
Tomislav Pejković

Izborno natjecanje za Vojtech Jarnik

2. kategorija

02.03.2010.

Zadatak 1. Dokažite da ne postoji peteročlan podskup skupa $\mathbb{N}$ sa svojstvom da je zbroj elemenata svakog njegovog tročlanog podskupa prost broj.

Zadatak 2. Neka je

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots \quad (a_n \neq 0)$$

polinom stupnja $n \geq 2$ s realnim koeficijentima. Ako vrijedi $(n-1)b^2 - nac < 0$, dokažite da $P(x)$ ima najviše $n-2$ realne nultočke.

Zadatak 3. Na jediničnoj kružnici slučajno su odabrane tri točke. Kolika je vjerojatnost da se središte kružnice nalazi unutar trokuta s vrhovima u tim točkama?

Zadatak 4. Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor ($n \in \mathbb{N}$) i neka je G konačna grupa. Ako je ϕ reprezentacija od G na V (tj. $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ je homomorfizam grupa, gdje je s $\mathrm{GL}(V)$ označena grupa svih regularnih linearnih operatora na V), dokažite da za svako $g \in G$ vrijedi

$$|\operatorname{tr}(\phi(g))| \leq n.$$

Kada se postiže jednakost?

Zadatak 5. Neka je X skup, $n \in \mathbb{N}$ i $f_i : X \to \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) neke linearno nezavisne funkcije. Dokažite da je

$$K := \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) \right| \leq 1, \text{ za sve } x \in X \right\}$$

kompaktan podskup u $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 6. Za prsten R kažemo da je *poluprost* ako je presjek svih prostih (obostranih) ideala u R jednak nul-idealu.

(a) Dokažite da je R poluprost ako i samo ako vrijedi $a = 0$, čim je $a \in R$ takav da je $aRa = \{0\}$.

(b) Ako je R poluprost, dokažite da tada za svaki ideal I u R vrijedi $Z(I) = Z(R) \cap I$ (gdje $Z(S)$ označava centar prstena S). Vrijedi li i obratna tvrdnja?

(c) Nađite primjer prstena R u kojem postoji ideal I u R takav da je $Z(I) \neq Z(R) \cap I$.

Svaki zadatak vrijedi *20 bodova.*
Dozvoljeno vrijeme rješavanja: *4 sata.*

Matija Bašić
Ilja Gogić
Tomislav Pejković