Izlučno natjecanje za Vojtěch Jarník IMC

5. ožujak 2004.

I. kategorija

1. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ izračunajte determinantu $n \times n$ matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & . & . & \\ & & & . & 2 & 1 \\ 0 & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Ako funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava

$$|f(x) - f(y)| \leq e^{(x-y)^2} - 1, \quad \text{za svake } x, y \in \mathbb{R},$$

dokažite da f mora biti konstanta.

3. Pretpostavimo da je $a \in \mathbb{R}$ i da omeđeni niz realnih brojeva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljava

$$x_{n+1}(1 - ax_n) = x_n + a, \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dokažite da je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ periodičan.

4. Na pravcu su dane 2004 različite točke. Promatramo udaljenosti između svake dvije od njih. Ako pretpostavimo da se svaka udaljenost pojavljuje najviše dvaput, dokažite da se barem 1002 udaljenosti pojavljuju točno jedanput.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Vrijeme pisanja je 4 puna sata.

Izlučno natjecanje za Vojtěch Jarník IMC

5. ožujak 2004.

II. kategorija

1. Realne $n \times n$ matrice $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ su definirane kako slijedi. Za svake $i, j = 1, \ldots, n$ je

$$a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{ako je } \frac{j}{i} \text{ prirodni broj,} \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$b_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{ako je } \frac{j}{i} = 1, \\ (-1)^k & \text{ako je } \frac{j}{i} \text{ prirodni broj oblika } \frac{j}{i} = p_1 p_2 \ldots p_k \\ & \quad \text{za različite proste brojeve } p_1, p_2, \ldots, p_k, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

   Dokažite da je $B = A^{-1}$.

2. Dani su normirani polinomi $f, g \in \mathbb{Z}[X]$. Dokažite da postoji normirani polinom $h \in \mathbb{Z}[X]$ takav da je $h(g(X))$ djeljiv s $f(X)$.

3. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{10000}$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $\sum_{j=1}^{10000} \frac{1}{a_j} = 1$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ označimo sa N_k broj indekasa $j \in \{1, 2, \ldots, 10000\}$ takvih da vrijedi

$$k(k-1) < a_j \leq k(k+1).$$

   Dokažite nejednakost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{N_k}{k(k+1)}} \leq 20.$$

4. (a) Dokažite da za svake $p \in [1, +\infty\rangle$ i $n \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $C_{p,n} \in \langle 0, +\infty\rangle$ takva da za bilo koje $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1,1\}} |\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{p,n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

   (b) Dokažite da konstante $C_{p,n}$ možemo odabrati tako da budu neovisne o n.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Vrijeme pisanja je 4 puna sata.