Izlučno natjecanje
za Vojtěch Jarník IMC
14. ožujak 2003.
I. kategorija

1. [10] Imamo četiri utega jednakog izgleda, ali s masama $1, 2, 3, 4$ (kilograma). Pokažite da u četiri vaganja na ravnotežnoj vagi s dvije zdjelice možemo odrediti koji uteg ima koliku masu.

2. [10] Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje su neprekidne u 0 i zadovoljavaju

$$f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 \qquad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

3. [10] Neka je n prirodni broj. Za svaki prirodni broj m definiramo $S_n(m) := \sum_{k=0}^{m-1} k^n$.

   (a) Ako su a i b relativno prosti prirodni brojevi, dokažite da je

   $$\frac{S_n(ab)}{ab} - \frac{S_n(a)}{a} - \frac{S_n(b)}{b}$$

   cijeli broj.

   (b) Ako je m neparni prirodni broj veći od 1 i ako su $p_1, \ldots, p_r$ svi njegovi prosti djelitelji, dokažite da je

   $$\frac{S_n(m)}{m} - \sum_{j=1}^{r} \frac{S_n(p_j)}{p_j}$$

   cijeli broj.

4. [10] U ravnini je dano n jediničnih vektora čiji zbroj je vektor duljine barem 1. Dokažite da postoji poredak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tih vektora takav da $v_1 + \ldots + v_k$ ima duljinu barem 1 za sve $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Izlučno natjecanje
za Vojtěch Jarník IMC
14. ožujak 2003.
II. kategorija

1. [10] Neka je G (multiplikativno pisana) grupa s jedinicom e. Ako elementi $a, b \in G$ zadovoljavaju relacije

$$a^3 = e, \quad ab^2 = ba^2, \quad \left(a^2 b\right)^{2003} = e,$$

dokažite da mora biti $a = b$.

2. [10] Postoji li neprekidna funkcija $f\colon \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ koja zadovoljava

$$f(f(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{za sve } x \in \langle 0, +\infty\rangle \ ?$$

3. [10] Neka je $f\colon [0,1] \to [0,1]$ neprekidna funkcija. Za svaki $t \in [0,1]$ neka A_t označava točku $(t, 0)$, B_t označava točku $(f(t), 1)$, a $\overline{A_t B_t}$ dužinu s krajevima A_t i B_t.

   (a) Dokažite da je skup $\bigcup_{t\in[0,1]} \overline{A_t B_t} \subseteq \mathbb{R}^2$ zatvoren.

   (b) Nađite najmanju vrijednost Lebesgueove mjere od $\bigcup_{t\in[0,1]} \overline{A_t B_t}$ i sve funkcije f za koje se ona postiže.

4. [10] Skup S ima $n \geq 2$ elemenata, a $A_1, \ldots, A_m$ su njegovi različiti podskupovi od barem dva elementa i takvi da za sve različite indekse $i, j, k \in \{1, \ldots, m\}$ vrijedi:

$$\text{ako je } A_i \cap A_j \neq \emptyset,\ A_i \cap A_k \neq \emptyset, A_j \cap A_k \neq \emptyset, \text{ onda je } A_i \cap A_j \cap A_k \neq \emptyset.$$

Pokažite da mora biti $m \leq 2^{n-1} - 1$.