IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - RJEŠENJA

27. 06. 2017.

Zadatak 1. Zadan je niz nenegativnih realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$. Dokažite da postoji beskonačna prebrojiva particija $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{n\in S_k} a_n = \infty$$

Rješenje. Definirat ćemo najprije pomoćnu particiju $\{S_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{N}^2}$ na sljedeći način: neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ bijekcija, neka je $n_0 = 0$ i za sve $l \geq 1$, neka je n_l najmanji prirodan broj takav da je

$$\sum_{s=n_{l-1}+1}^{n_l} a_s > 1.$$

Definiranjem $S_{g(l)} = \{s : n_{l-1} < s \leq n_l\}$, za sve $(k,m) \in \mathbb{N}^2$ očito vrijedi

$$\sum_{n\in S_{k,m}} a_n > 1, \forall k,m \in \mathbb{N}$$

pa konačno definiranjem $S_k := \cup_{m\in\mathbb{N}} S_{k,m}$ dobivamo traženu particiju. ✓

Zadatak 2. Za matricu $A \in M^{n\times n}(\mathbb{Z})$ vrijedi

$$A^2 + A - 2I = J,$$

gdje je J matrica kojoj su svi elementi jednaki 1. Ako je $u = [1, 1, \ldots, 1]^t$ svojstveni vektor od A, dokažite da su sve svojstvene vrijednosti od A cjelobrojne.

Rješenje. Neka je λ svojstvena vrijednost od u. Iz $Au = \lambda u$ slijedi $\lambda \in \mathbb{Z}$.

$$A^2 + A - 2I = J \Rightarrow A(A^2 + A - 2I) = AJ = \lambda \cdot J = \lambda \cdot (A^2 + A - 2I).$$

Slijedi da je

$$(A - \lambda I)(A^2 + A - 2I) = 0.$$

S obzirom da polinom $p(x) := (x - \lambda)(x^2 + x - 2)$ poništava A, vrijedi da je svaka svojstvena vrijednost od A nultočka od p. S obzirom da su sve nultočke od p cjelobrojne, svaka svojstvena vrijednost od A je također cjelobrojna. ✓

Zadatak 3. Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ takve da za sve realne polinome u n varijabli vrijedi sljedeća tvrdnja: ako je $p(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$, tada p ima minimum na $\mathbb{R}^n$.

Rješenje. Najprije promotrimo slučaj $n = 1$. Ako je $p(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, tada je p parnog stupnja i vodeći koeficijent mu je pozitivan pa $p(x) \to \infty$ za $x \to \pm\infty$. Zbog toga postoji dovoljno M dovoljno velik takav da je $\inf_{x\in[-M,M]} p(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}} p(x)$. Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu postiže minimum pa iz uvjeta slijedi da p ima minimum na $\mathbb{R}$. U slučaju $n > 1$. Promotrimo polinom

$$p(x_1, ..., x_n) := (1 - x_1 x_2)^2 + x_1^2.$$

Jasno je da vrijedi $p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Neka je $\epsilon > 0$. Za $0 < x_1 < \sqrt{\epsilon}$, $x_2 = \frac{1}{x_1}$ i $x_3, ..., x_n$ proizvoljne fiksne realne brojeve vrijedi $0 < p(x_1, ..., x_n) = x_1^2 < \epsilon$. Budući da je $\epsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi da p nema minimum u $\mathbb{R}^n$. ✓

Zadatak 4. Za S, proizvoljan podskup od $\mathbb{N}$, dokažite da je barem jedna od sljedećih tvrdnji istinita:

1. Postoje različiti konačni podskupovi F i G od S takvi da je

$$\sum_{n \in F} \frac{1}{n} = \sum_{n \in G} \frac{1}{n}$$

2. Postoji pozitivan racionalan broj $r < 1$ takav da za sve konačne podskupove F od S vrijedi

$$\sum_{n \in F} \frac{1}{n} \neq r$$

Rješenje. Ako postoje $x, y \in S$ za koje je $x < y < 2x$, promotrimo $r := \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Očito vrijedi $0 < r < \frac{1}{y} \leq 1$. Ako se r ne može prikazati kao konačna suma nekih elemenata iz S, druga je tvrdnja istinita. U suprotnom postoji konačan podskup T od S takav da je $r = \sum_{z \in T} \frac{1}{z}$. Zbog toga što je $r < \frac{1}{y}$, očito y nije u T pa vidimo da prva tvrdnja vrijedi uz $F = \{x\}$ i $G = \{y\} \cup T$.

Preostaje nam dokazati tvrdnju zadatka u slučaju kada za sve $x, y \in S$, takve da je $x < y$ vrijedi $2x \leq y$. Dokazat ćemo da za takve S vrijedi druga tvrdnja. Ako druga tvrdnja vrijedi za $S \setminus \{1\}$, vrijedi i za S pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $1 \notin S$. Neka su $2 \leq x_1 < x_2 < \dots$ svi elementi u S. Indukcijom lako slijedi da je $x_n \geq 2^n$. Ako postoji $n \in \mathbb{N}$ u kojem je nejednakost stroga, tada vrijedi: $s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. Tada bilo koji $r \in (s, 1)$ zadovoljava drugu tvrdnju. Konačno, ako je $x_n = 2^n$, tada $r = \frac{1}{3}$ očito zadovoljava drugu tvrdnju.

Zadatak 5. Dokažite da postoji $A \subset [0, 1]$ tako da za sve polinome stupnja manjeg ili jednakog 2019 vrijedi

$$\int_A p(x)dx = \int_{[0,1] \setminus A} p(x)dx$$

Rješenje. Indukcijom ćemo pokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ postoji A_n takav da

$$\int_{A_n} p(x)dx = \int_{[0,1] \setminus A_n} p(x)dx$$

vrijedi za sve polinome stupnja $\leq n$. Za $n = 0$ definirajmo $A_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ i tvrdnja očito vrijedi za konstantne polinome. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i definirajmo

$$A_{n+1} := \frac{1}{2} A_n \cup \frac{1}{2} \left(1 + [0, 1] \setminus A_n\right).$$

Zbog linearnosti integrala dovoljno je provjeriti jednakost

$$\int\limits_{\frac{1}{2}A_n \cup \frac{1}{2}(1+[0,1]\setminus A_n)} x^k dx = \int\limits_{\frac{1}{2}([0,1]\setminus A_n)\cup \frac{1}{2}(1+A_n)} x^k dx \tag{1}$$

za $k \in \{1, 2 \ldots, n+1\}$. Koristeći supstitucije $x \mapsto \frac{y}{2}$ i $x \mapsto \frac{x+1}{2}$, u (1) imamo:

$$\begin{aligned} LHS &= 2 \cdot \int\limits_{A_n} \left(\frac{x}{2}\right)^k dx + 2 \cdot \int\limits_{[0,1]\setminus A_n} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k dx \\ &= 2^{-k+1} \int\limits_{[0,1]} x^k + \int\limits_{[0,1]\setminus A_n} q(x) dx \\ &\overset{(*)}{=} 2^{-k+1} \int\limits_{[0,1]} x^k + \int\limits_{A_n} q(x) dx \\ &= 2 \cdot \int\limits_{[0,1]\setminus A_n} \left(\frac{x}{2}\right)^k dx + 2 \cdot \int\limits_{A_n} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k dx = RHS \end{aligned}$$

gdje jednakost $(*)$ vrijedi po pretpostavci indukcije jer je $q(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^k - \left(\frac{x}{2}\right)^k$ polinom stupnja $k-1 \leq n$. ✓