IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - ZADATCI

05. 07. 2018.

Zadatak 1. Neka je n prirodan broj i A realna $n \times n$ matrica u kojoj je suma elemenata u svakom retku jednaka 2. Odredi sumu svih elemenata matrice A^{2018}.

Zadatak 2. Neka je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ niz pozitivnih brojeva takav da niz

$$(b_N)_{N=1}^{\infty}, \quad b_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n$$

konvergira. Dokažite da tada konvergira i niz

$$(c_N)_{N=1}^{\infty}, \quad c_N := \frac{1}{2\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

i to prema istom limesu.

Zadatak 3. Trnoružica na ploču napiše N prirodnih brojeva. Nakon toga zla vještica baci kletvu na ploču kojom izbriše neki broj, a zatim i sve brojeve koji su relativno prosti s prvim izbrisanim brojem. Trnoružičin cilj je da nakon kletve na ploči ostane barem K brojeva i da su svi preostali brojevi na ploči u parovima relativno prosti. U ovisnosti o prirodnom broju K odredi najmanji prirodni broj N takav da Trnoružica može na početku napisati N prirodnih brojeva s kojima će ostvariti svoj cilj neovisno o vještičinoj kletvi.

Zadatak 4. U ovisnosti o prirodnom broju n odredi sve parametre $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje sljedeći sustav ima rješenje u realnim brojevima:

$$a_0 = a_n = \lambda;\ a_k = 2\lambda - \frac{1}{a_{k-1}},\ k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Zadatak 5. Potpuni homogeni simetrični polinom stupnja d u varijablama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definiran je formulom

$$h_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_d \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d}.$$

Tako je npr. $h_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$. Dokažite da za svaki parni prirodni broj d i za svake realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi $h_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$.