IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - RJEŠENJA

27. 06. 2017.

Zadatak 1. Odredite sve polinome f i g s realnim koeficijentima koji zadovoljavaju jednakost

$$(f(x))^3 - (g(x))^2 = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. Pretpostavimo da je $\deg f = n > 0$, tada je i $\deg g = m > 0$. Deriviranjem dane jednakosti dobivamo da je

$$3(f(x))^2 f'(x) = 2g(x)g'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Najprije primijetimo da obje jednakosti vrijede za sve $z \in \mathbb{C}$. Naime, to su polinomijalne jednadžbe koje imaju beskonačno mnogo rješenja, što znači da je svaki $z \in \mathbb{C}$ njihovo rješenje.

Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da je $f^2(z) = 0$, tada je $f(z) = 0$ pa iz prve jednakosti imamo da je $g(z) \neq 0$, druga jednakost tada govori da je $g'(z) = 0$. Kako to vrijedi za proizvoljnu nultočku polinoma f^2, vidimo da $f^2 \mid g'$. Ukoliko je neka nultočka od f^2 veće kratnosti u f^2, nego u g', onda vidimo da ona mora biti nultočka polinoma g, što je nemoguće. Analogno zaključimo da $g \mid f'$. Dakle, imamo nejednakosti

$$2n \leq m - 1 \qquad \text{i} \qquad m \leq n - 1,$$

iz čega je $2n \leq n - 2$, što je nemoguće. Dakle, $\deg f = \deg g = 0$. Konačno, sva rješenja su $(f(x), g(x)) = (\sqrt[3]{a^2+1}, a)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. ✓

Zadatak 2. Dokažite da postoji beskonačno mnogo parova prirodnih brojeva (a, b) takvih da je

$$a^2 - 3ab + b^2 = 1.$$

Rješenje. Promatramo dani izraz kao kvadratnu jednadžbu u a:

$$a^2 - 3ab + b^2 - 1 = 0.$$

Ako je (a, b) cjelobrojno rješenje ove jednadžbe, onda mora vrijediti $a = \dfrac{3b \pm \sqrt{5b^2+4}}{2}$. Obratno, uzmemo li $b \in \mathbb{N}$ takav da je izraz $5b^2 + 4$ potpun kvadrat, onda je $a = \dfrac{3b \pm \sqrt{5b^2+4}}{2}$ očito prirodan broj, pa je (a, b) rješenje početne jednadžbe. Odavde slijedi da je dovoljno pokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva b za koje je $5b^2 + 4$ potpun kvadrat. To možemo dokazati konstruktivno: $b = 1$ je očito jedan mogući izbor. Nadalje, ako za neki b postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $5b^2 + 4 = k^2$, onda imamo

$$\begin{aligned} 5b^2 + 4 = k^2 &\implies 25b^4 + 20b^2 = 5(kb)^2 \\ &\implies 25b^4 + 20b^2 + 4 = 5(kb)^2 + 4 \\ &\implies (5b+2)^2 = 5(kb)^2 + 4, \end{aligned}$$

što pokazuje da je i kb dobar izbor. Budući da je $k > 1$, ovako dobivamo strogo rastući niz rješenja, čime smo pokazali da ih ima beskonačno mnogo. ✓

Napomena. Alternativno, umjesto eksplicitne konstrukcije beskonačne familije rješenja, dovoljno je pozvati se na teoriju Pellovih jednadžbi.

Zadatak 3. Odredite sve kompleksne brojeve $z \neq 0$ takve da je niz matrica $(M_n(z))_{n=0}^{\infty}$ dan s

$$M_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} 1 & z^{2^k} \\ z^{-2^k} & 1 \end{bmatrix}$$

ograničen (tj. elementi matrica čine četiri ograničena niza kompleksnih brojeva).

Rješenje. Odgovor je: svi kompleksni brojevi z za koje vrijedi $|z| = 1$ i $z \neq 1$.

Dokažimo indukcijom da za $z \neq 1$ imamo

$$M_n(z) = \frac{1 - z^{2^n}}{1 - z} \begin{bmatrix} z^{-2^n+1} & z \\ z^{-2^n} & 1 \end{bmatrix},$$

dok za $z = 1$ vrijedi

$$M_n(1) = 2^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Baza indukcije ($n = 0$) je trivijalna. U induktivnoj pretpostavci uzmimo $n \geq 1$ i uočimo da vrijedi

$$M_{n+1}(z) = \begin{bmatrix} 1 & z \\ z^{-1} & 1 \end{bmatrix} M_n(z^2).$$

Provjera da vrijedi tražena formula je trivijalna za $z = 1, -1$, dok za ostale vrijednosti z koristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned} M_{n+1}(z) &= \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1 - z^2} \begin{bmatrix} 1 & z \\ z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{-2^{n+1}+2} & z^2 \\ z^{-2^{n+1}} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{(1-z)(1+z)} \begin{bmatrix} (1+z)z^{-2^{n+1}+1} & (1+z)z \\ (1+z)z^{-2^{n+1}} & 1+z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vratimo se zadatku. Uočimo da je niz matričnih elemenata $M_n(1)$ neograničen, stoga nadalje pretpostavljamo $z \neq 1$. Element u donjem desnom kutu matrice $M_n(z)$ je $(1 - z^{2^n})/(1 - z)$, što je ograničeno samo za $|z| \leq 1$. Element u gornjem lijevom kutu matrice $M_n(z)$ je $(1 - z^{-2^n})/(1 - z^{-1})$, a ovo je ograničeno samo za $|z| \geq 1$. Odavde zaključujemo da je nužno $|z| = 1$. Obratno, $|z| = 1$, $z \neq 1$ je također i dovoljno za ograničenost, jer iz formule vidimo da je svaki element matrice $M_n(z)$ najviše $2/|1 - z|$ po apsolutnoj vrijednosti. ✓

Zadatak 4. Neka je N prirodan broj. Svaki brid pravilnog tetraedra podijeljen je točkama na N jednakih dijelova. Tim točkama su povučene sve ravnine paralelne nekoj od stranica tetraedra čime je on podijeljan na N^3 manjih, međusobno sukladnih tetraedara. Neka je T skup svih vrhova tako dobivenih manjih tetraedara. Promotrimo sve podskupove skupa T u kojima ne postoje 2 točke takve da je pravac određen tim točkama paralelan nekoj od stranica tetraedra. Neka je A najveći mogući broj točaka koje može sadržavati neki takav podskup.

Neka je k prirodan broj i neka je S skup svih cjelobrojnih, nenegativnih rješenja jednadže $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} = N$. Promotrimo sve podskupove skupa S u kojima ne postoje dva rješenja, $(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_{2k})$ takva da je $x_i = y_i$, za neki $i \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$. Neka je B_k najveći mogući broj rješenja koje može sadržavati neki takav podskup.

(a) Dokažite da je $A = B_2$.

(b) Izračunajte B_k, za $k \in \mathbb{N}$ (u ovisnosti o N i k).

Rješenje.

(a) Pretpostavimo (bez smanjenja općenitosti) da je razmak među tako dobivenim paralelnim ravninama (u 4 moguća “smjera”) jednak 1. Svaki vrh nekog od malih tetraedara je jedinstveno određen svojom udaljenosti od stranica početnog tetraedra, radi naše pretpostavke će ta udaljenost uvijek biti cijeli broj. Dakle, svaki vrh nekog od malih tetraedara je određen nekom četvorkom cijelih, nenegativnih brojeva, (x_1, x_2, x_3, x_4) takvih da je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N$. Pravac kroz neka dva vrha manjih tetaedara će biti paralelan nekoj od stranica tetraedra ako i samo ako su oba vrha (koja određuju taj pravac) jednako udaljena od neke ravnine, tj. ako i samo ako se “koordinate” tih vrhova podudaraju na nekom mjestu. Dakle, $A = B_2$.

(b) Promatrajmo matricu $m \times 2k$ čiji su elementi nenegativni cijeli brojevi takvi da je suma svakog retka jednaka N i da ne postoje dva jednaka broja u istom stupcu. Najveći mogući m (broj redaka) za takvu matricu je traženi B_k. U svakom stupcu je m brojeva pa je suma svakog stupca barem

$$0 + 1 + \ldots + (m-1) = \frac{(m-1)m}{2},$$

stoga je suma svih elemenata matrice barem

$$2k \cdot \frac{(m-1)m}{2} = km(m-1) \le mN,$$

zato što je mN suma svih brojeva u matrici. Dakle, $m \le \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor + 1$.

Pokažimo da je $B_k = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor + 1$. Neka je $N = ak + b$, gdje je a nenegativan cijeli broj i $b \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Trebamo konstruirati matricu $(a+1) \times 2k$ s navedenim svojstvima.

$$\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & \ldots & 0 & a & a & \ldots & a & a+b \\
1 & 1 & \ldots & 1 & a-1 & a-1 & \ldots & a-1 & a-1+b \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a-1 & a-1 & \ldots & a-1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1+b \\
a & a & \ldots & a & 0 & 0 & \ldots & 0 & b \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{k \text{ stupaca}} & \multicolumn{4}{c|}{k-1 \text{ stupaca}} &
\end{array}$$

Ovime je rješenje privedeno kraju. ✓

Zadatak 5. Neka je $\mathbb{F}_2$ polje s dva elementa, neka je L_n broj linearnih, a A_n broj afinih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad $\mathbb{F}_2$. Dokažite sljedeće tvrdnje.

(a) $L_n = L_{n-1} + A_{n-1}$ i $A_n = 2^n L_{n-1} + A_{n-1}$, za svaki prirodni broj n.

(b) $2^{n/2} L_n \le A_n \le 2^{(n+1)/2} L_n$, za svaki nenegativni cijeli broj n.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 L_n}{n^2} = \frac{1}{4}$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 A_n}{n^2} = \frac{1}{4}$.

(***Afin potprostor*** *je translat linearnog potprostora za proizvoljan vektor.*
Dozvoljeno je korištenje prethodnih dijelova u rješavanju narednih, bez obzira na to jeste li ih riješili.)

Rješenje.

(a) Primjetimo prvo da za vektore $v_1, v_2 \in V$i potprostore N_1, N_2 of V jednakost $v_1 + N_1 = v_2 + N_2$ vrijedi ako i samo ako $v_1 - v_2 \in N_1 = N_2$. Stoga svaki afini potprostor M vektorskog prostora V je oblika $v + N$ za proizvoljni $v \in M$ i za jedinstveni potprostor N of V. In this case we write $\operatorname{lin}(M) = N$. Također primjetimo da je presjek dva afina potprostora prazan skup ili afini potprostor. Nadalje, različiti translati od N čine particiju od V. Da bi provjerili je li neprazan podskup N vektorskog prostora V nad $\mathbb{F}_2$ potprostor, dovoljno je provjeriti da $v_1, v_2 \in N$ implicira $v_1 + v_2 \in N$.

Uzmimo n-dimenzionalni vektorski prostor V_n nad $\mathbb{F}_2$, fiksirajmo njegov $(n-1)$-dimenzionalni potprostor V_{n-1} i izaberimo neki $u \in V_n \setminus V_{n-1}$. Jasno je da V_{n-1} i $u + V_{n-1}$ čine particiju od V_n. S $\mathcal{N}$ označimo familiju potprostora V_n koji nisu sadržani V_{n-1}, so that $|\mathcal{N}| = L_n - L_{n-1}$. S $\mathcal{M}$ označimo familiju afinih potprostora od V_{n-1}. Iz definicije imamo $|\mathcal{M}| = A_{n-1}$. Preslikavanja

$$\Phi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}, \quad \Phi\colon N \mapsto N \cap (u + V_{n-1}) - u$$

i

$$\Psi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}, \quad \Psi\colon M \mapsto \operatorname{lin}(M) \cup (u + M)$$

su dobro definirana zbog prethodne diskusije i jer nad $\mathbb{F}_2$ imamo

$$(u + M) + (u + M) = 2u + (M + M) = M + M = \operatorname{lin}(M).$$

Nadalje, ova preslikavanja su međusobno inverzna, što se vidi iz

$$\Psi(\Phi(N)) = (N \cap V_{n-1}) \cup \Big(N \cap (u + V_{n-1})\Big) = N$$

i

$$\Phi(\Psi(M)) = (u + M) - u = M.$$

Stoga, uspostavili smo bijekciju između $\mathcal{N}$ i $\mathcal{M}$, pa

$$L_n - L_{n-1} = |\mathcal{N}| = |\mathcal{M}| = A_{n-1},$$

što je i trebalo pokazati.

Dokažimo sad i drugu jednakost. Neka je $\mathcal{N}'$ familija potprostora N od V_n takvih da je $u \in N$ i neka je $\mathcal{M}'$ familija afinih potprostora M od V_n takvih da je $u + M \neq M$. Očito, $\mathcal{N}'$ je u bijektivnoj korespondenciji s familijom svih potprostora od $V_n/\operatorname{span}(u)$ i ovaj vektorski prostor ima dimenziju $n-1$, pa slijedi $|\mathcal{N}'| = L_{n-1}$. S druge strane, afini potprostori M od V_n takvi da je $u + M = M$ su u bijektivnoj korespondenciji s afinim potprostorima od $V_n/\operatorname{span}(u)$, iz čega slijedi $|\mathcal{M}'| = A_n - A_{n-1}$.

Uzmimo proizvoljni $M \in \mathcal{M}'$ i zapišimo ga u obliku $M = v + K$ za neki potprostor K of V_n. Uvjet $u + M \neq M$ je ekvivalentan s $u \notin K$. U tom slučaju $u + M$ i M su disjunktni $M \cup (u + M) = v + \operatorname{span}(K \cup \{u\})$. Stoga, preslikavanje

$$\Theta\colon \mathcal{M}' \to \mathcal{N}', \quad \Theta\colon M \mapsto \operatorname{lin}\Big(M \cup (u + M)\Big)$$

je dobro definirano. Pogledajmo sada kardinalitet praslike $\Theta^{-1}(\{N\})$ for any $N \in \mathcal{N}'$. Za svaki M definiran kao gore $\Theta(M) = N$ ako i samo ako $\operatorname{span}(K \cup \{u\}) = N$. Označimo $k = \dim N$. Primjetimo da K je direktni komplement $\operatorname{span}(u)$ u N koji može biti izabran na 2^{k-1} načina. To možemo vidjeti tako da nadopunimo u do baze za N s vektorima $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ i primjetimo da vrijedi $v_i \in K$ ili $v_i + u \in K$ za svaki i. Stoga

$$K = \operatorname{span}(\{v_1 + \alpha_1 u, v_2 + \alpha_2 u, \ldots, v_{k-1} + \alpha_{k-1} u\})$$

za svaki izbor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1} \in \{0,1\} = \mathbb{F}_2$. Nakon što izaberemo K,njegov translat M možemo odabrati na $|V_n/K| = 2^{n-k+1}$ načina. Stoga,

$$|\Theta^{-1}(\{N\})| = 2^{k-1} 2^{n-k+1} = 2^n$$

za svaki N pa zaključujemo

$$A_n - A_{n-1} = |\mathcal{M}'| = 2^n |\mathcal{N}'| = 2^n L_{n-1}.$$

✓

(b) Primjetimo da $L_0 = A_0 = 1$. Paralelno ćemo dokazati obje nejednakosti koristeći matematičku indukciju po n. Baza indukcije za $n = 0$ lako slijedi: $1 \leq 1 \leq \sqrt{2}$. Uzmimo prirodan broj n i pretpostavimo da nejednakost vrijedi za $n-1$ umjesto n. Koristeći jednakosti dokazane u (a) možemo pisati

$$\begin{aligned} A_n - 2^{n/2} L_n &= 2^n L_{n-1} + A_{n-1} - 2^{n/2} L_{n-1} - 2^{n/2} A_{n-1} \\ &= (2^{n/2} - 1)\Big(2^{n/2} L_{n-1} - A_{n-1}\Big) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)/2} L_n - A_n &= 2^{(n+1)/2} L_{n-1} + 2^{(n+1)/2} A_{n-1} - 2^n L_{n-1} - A_{n-1} \\ &\geq 2^{(n-1)/2} L_{n-1} + 2^{(n+1)/2} A_{n-1} - 2^n L_{n-1} - A_{n-1} \\ &= (2^{(n+1)/2} - 1)\Big(A_{n-1} - 2^{(n-1)/2} L_{n-1}\Big). \end{aligned}$$

Primjetimo da su oba izraza nenegativni iz pretpostavke indukcije, čime je dokaz gotov. ✓

(c) Direktna posljedica od (a) i (b) su nejednakosti

$$L_n \leq \Big(1 + 2^{n/2}\Big) L_{n-1}, \quad L_n \geq \Big(1 + 2^{(n-1)/2}\Big) L_{n-1}.$$

Njihovom iteracijom dobivamo

$$L_n \leq \prod_{k=1}^{n} \Big(2^{k/2} + 1\Big) \leq \prod_{k=1}^{n} 2^{k/2+1} = 2^{n^2/4 + 5n/4}$$

i

$$L_n \geq \prod_{k=1}^{n} \Big(2^{(k-1)/2} + 1\Big) \geq \prod_{k=1}^{n} 2^{(k-1)/2} = 2^{n^2/4 - n/4}.$$

Logaritmiranjem i dijeljenjem n^2 dobivamo

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4n} \leq \frac{\log_2 L_n}{n^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{5}{4n}.$$

Preostaje pustiti $n \to \infty$i iskoristiti teorem o sendviču. Konačno, iz (b) imamo

$$\frac{\log_2 L_n}{n^2} + \frac{1}{2n} \leq \frac{\log_2 A_n}{n^2} \leq \frac{\log_2 L_n}{n^2} + \frac{n+1}{2n^2},$$

pa primjenom teorema o sendviču zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 A_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 L_n}{n^2} = \frac{1}{4}.$$

✓

Napomena. Prvih nekoliko članova dvaju nizova je dano sljedećom tablicom.

n	0	1	2	3	4	5
L_n	1	2	5	16	67	374
A_n	1	3	11	51	307	2451

Nizovi $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ su uvršteni u *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* pod brojevima *A006116*, odnosno *A182176*. Nema poznatih zatvorenih formula za ove nizove.

Alternativno (ali duže) rješenje za dio (a) može se dobiti tako da se L_n i A_n najprije zapišu kao sume 2-binomnih koeficijenata,

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_2, \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}_2,$$

te korištenjem svojstava q-binomnih koeficijenata ili formule

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1) \cdots (q^k - 1)}.$$

Dio (c) nagovještava da L_n raste “jednako brzo” kao $2^{n^2/4}$ kada $n \to \infty$. Iako limes kvocijenata $L_n/2^{n^2/4}$ ne postoji, može se pokazati da vrijedi

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ neparan}}} \frac{L_n}{2^{n^2/4}} = 7.371949\ldots, \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ paran}}} \frac{L_n}{2^{n^2/4}} = 7.371968\ldots.$$