# IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - ZADACI

27. 06. 2017.

**Zadatak 1.** Odredite sve polinome $f$ i $g$ s realnim koeficijentima koji zadovoljavaju jednakost

$$(f(x))^3 - (g(x))^2 = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 2.** Dokažite da postoji beskonačno mnogo parova prirodnih brojeva $(a, b)$ takvih da je

$$a^2 - 3ab + b^2 = 1.$$

**Zadatak 3.** Odredite sve kompleksne brojeve $z \neq 0$ takve da je niz matrica $(M_n(z))_{n=0}^{\infty}$ dan s

$$M_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} 1 & z^{2^k} \\ z^{-2^k} & 1 \end{bmatrix}$$

ograničen (tj. elementi matrica čine četiri ograničena niza kompleksnih brojeva).

**Zadatak 4.** Neka je $N$ prirodan broj. Svaki brid pravilnog tetraedra podijeljen je točkama na $N$ jednakih dijelova. Tim točkama su povučene sve ravnine paralelne nekoj od stranica tetraedra čime je on podijeljan na $N^3$ manjih, međusobno sukladnih tetraedara. Neka je $T$ skup svih vrhova tako dobivenih manjih tetraedara. Promotrimo sve podskupove skupa $T$ u kojima ne postoje 2 točke takve da je pravac određen tim točkama paralelan nekoj od stranica tetraedra. Neka je $A$ najveći mogući broj točaka koje može sadržavati neki takav podskup.

Neka je $k$ prirodan broj i neka je $S$ skup svih cjelobrojnih, nenegativnih rješenja jednadže $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} = N$. Promotrimo sve podskupove skupa $S$ u kojima ne postoje dva rješenja, $(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_{2k})$ takva da je $x_i = y_i$, za neki $i \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$. Neka je $B_k$ najveći mogući broj rješenja koje može sadržavati neki takav podskup.

(a) Dokažite da je $A = B_2$.

(b) Izračunajte $B_k$, za $k \in \mathbb{N}$ (u ovisnosti o $N$ i $k$).

**Zadatak 5.** Neka je $\mathbb{F}_2$ polje s dva elementa, neka je $L_n$ broj linearnih, a $A_n$ broj afinih potprostora $n$-dimenzionalnog vektorskog prostora nad $\mathbb{F}_2$. Dokažite sljedeće tvrdnje.

(a) $L_n = L_{n-1} + A_{n-1}$ i $A_n = 2^n L_{n-1} + A_{n-1}$, za svaki prirodni broj $n$.

(b) $2^{n/2} L_n \leq A_n \leq 2^{(n+1)/2} L_n$, za svaki nenegativni cijeli broj $n$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log_2 L_n}{n^2} = \dfrac{1}{4}$ i $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log_2 A_n}{n^2} = \dfrac{1}{4}$.

*(**Afin potprostor** je translat linearnog potprostora za proizvoljan vektor.*
*Dozvoljeno je korištenje prethodnih dijelova u rješavanju narednih, bez obzira na to jeste li ih riješili.)*

*Svaki zadatak vrijedi* 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 300 *minuta.*